This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Library
of the
University of Wisconsin

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DU

CALCUL DES ERREURS,

AVEC DES

TABLES STÉRÉOTYPÉES,

OUVRAGE UTILE A CEUX QUI CULTIVENT LES SCIENCES D'OBSERVATION;

PAR

LE CHEVALIER FR. FAÀ DE BRUNO,

DOCTEUR ÈS SCIENCES DES FACULTÉS DE PARIS ET TURIN,

Professeur de Mathématiques à Turin.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

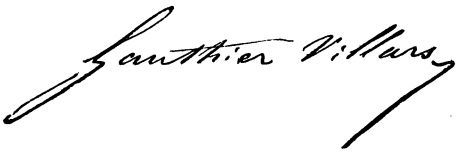
1869

Digitized by Google

L'Auteur et l'Éditeur se réservent le droit de traduire ou de faire traduire cet Ouvrage en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le courant de 1869, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Digitized by Google

185212
JUN -9 1914
LGD
F112

PRÉFACE.

Les découvertes dans les sciences physiques et naturelles s'obtiennent en général à la suite de plusieurs séries d'observations. Lorsque ces découvertes concordent avec les résultats qu'on peut déduire logiquement de théories déjà établies et universellement admises, on est fondé à les croire exactes, et alors elles servent à leur tour à établir sur des bases plus solides d'autres principes de la science. Mais s'il arrive que les phénomènes qu'on observe n'aient laissé entrevoir aucune liaison avec ceux déjà connus et étudiés, les lois auxquelles on croira pouvoir les assujettir ne seront qu'une expression approchée de la réalité, et plutôt un *desideratum* qu'une donnée de la science. L'Astronomie, la Physique, la Météorologie nous offrent des exemples nombreux de lois ou de quantités qui ne sont pas connues avec certitude, et dont la détermination offre seulement un certain degré de probabilité, que des recherches futures peuvent augmenter ou diminuer.

Dans cet océan d'incertitudes au milieu duquel la philosophie naturelle se débattra toujours (car jamais l'homme n'atteindra ni ne verra les limites du savoir), la science, qui aspire toujours au positif, désire au moins connaître entre quelles limites la

Digitized by Google

vérité se trouve resserrée, et quel degré de confiance mérite tel ou tel résultat.

Or, même en laissant de côté l'habileté des observateurs, la bonté des méthodes employées, etc., les valeurs assignées par les observations aux quantités que l'on veut déterminer peuvent encore varier par suite de la méthode analytique qui sert à les déduire de l'ensemble des observations. Il est donc de toute importance de suivre une marche sûre qui conduise invariablement à la détermination de valeurs satisfaisant le plus exactement possible à un système donné d'observations.

Les méthodes propres à déduire d'un système d'observations les quantités que l'on cherche, de telle sorte que les erreurs à craindre sur elles soient comprises entre les limites les plus resserrées, constituent le *Calcul des Erreurs*.

Dans l'état actuel de la science, il n'est plus permis, si l'on veut faire de la science vraie et utile, de publier un résultat sans préciser le degré de confiance qu'il mérite, c'est-à-dire sans indiquer l'erreur probable dont il est affecté.

C'est seulement en procédant ainsi, que les savants, comme les observateurs, ne travailleront plus en vain pour la science.

Encouragé par ces considérations, je n'ai pas cru inutile de résumer dans un petit Traité les parties de ce Calcul qui peuvent trouver une application immédiate et journalière, et de l'enrichir de Tables propres à faciliter les opérations qui s'y rapportent.

Digitized by Google

J'espère, dans ce court travail, avoir dit au lecteur tout ce qui est nécessaire, non pour *savoir*, mais pour *faire* ce qu'exige le calcul des erreurs, en laissant de côté toutes les théories étrangères à ce but. Le lecteur sérieux qui voudra approfondir davantage la matière pourra suppléer à la brièveté de l'exposition en consultant la Note des ouvrages indiqués à la fin de ce volume. Cette liste seule suffirait au besoin à prouver combien d'études profondes ont déjà été entreprises sur le sujet qui nous occupe, et combien il était nécessaire, au milieu de tant de matériaux, de démêler ce qui est le plus généralement adopté, afin que chacun fût à même, sans recherches pénibles, d'appliquer à ses travaux les méthodes reconnues les meilleures.

J'ajouterai encore : une science ne mérite ce nom qu'autant qu'on en possède un exposé élémentaire, où le sens des mots soit bien fixé et où les premiers principes soient nettement établis. A ce titre, je crois avoir rempli une lacune dans la littérature mathématique.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE	III
I. — Instruments d'observation. — Erreurs constantes, instrumentales ou personnelles	1
II. — Erreurs accidentelles, leur probabilité	8
III. — Théorie des moyennes	13
IV. — Poids des observations	22
V. — Théorie des moindres carrés	30
VI. — Méthode des moindres carrés pour des équations linéaires.	33
VII. — Méthode des moindres carrés pour des équations non linéaires	39
VIII. — Probabilité typique des erreurs	41
IX. — Erreur à craindre et mesures de précision	52
X. — De l'erreur probable	60
XI. — Applications	68
TABLE I	I
TABLE II	XXIX
TABLE III	XXXV
TABLE IV	XXXIX
NOTE DES OUVRAGES	XLIII

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
3	22	plus sensibles	moins sensibles
6	25	t. II	t. XI
9	1 en remontant	$= AB\ldots$	$= 2AB\ldots$
10	3	$AB\ldots$	$2AB\ldots$
11	9	$\pm Bc$	$\pm Be$
»	24	NTR′	RNTR′
17	6	$m^2 = \ldots$	$m = \ldots$
20	tableau, colonne 1	20,09	20,69
»	»	18,90	18,99
»	»	18,26	19,26
»	»	19,72	19,71
»	tableau, colonne 4	4,577	4,537
»	»	4,268	4,368
»	»	17,756	17,576
»	11 en remontant	10″,72	19″,71
»	9 en remontant	17,756	17,576
»	7 en remontant	19″,72	19″,71
23	12	inverse du	inverse de la racine carrée du
24	équation (2)	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n'}$
26	14	formule (2)	formule (6)
»	16	$K = 100$	$K = 10$
27	1	première	quatrième
28	13	$p_1 R'^1$	$p_1 R_1^2$
29	4	$= 3'',5$	$= 2'',6$
»	6	$\pm 3'',5$	$\pm 2'',6$
31	3 en remontant	x, λ	x, y
36	tableau, colonne 5	$+ 0,25$	$+ 3,25$
»	5 en remontant	$= x -$	$= x +$
»	4 en remontant	$= x -$	$= x +$
»	1 en remontant	$- 485x$	$- 1,85x$
»	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 en r.	remplacer les chiffres 9 par y, sauf dans 0,329.	

Digitized by Google

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
37	6	$+0'',0900097\,n$	$+0'',090097\,n$
38	4 en remontant	Σd^2	$\Sigma\delta^2$
43	2 en remontant	$a^{\pm bm}$	$ae^{\pm bm}$
44	2	$a^{\pm bm}a^{\pm bn} = a^{\pm b(m+n)} = a^{\pm bp}$	$ae^{\pm bm}ae^{\pm bn} = ae^{\pm b(m+n)} = ae^{\pm bp}$
»	5	a^{-bn^2}	ae^{-bn^2}
46	17	septième	système
48	14	$e^{-h^2}dx$	$e^{-h^2x^2}dx$
»	16	$\lambda =$	$\frac{1}{\lambda} =$
49	5	+ la possibilité	+ la probabilité
»	9	$\varphi(x)\,dx$	$\varphi'(x)\,dx$
»	6 en remontant	$OP = \beta$	$OQ = -\beta$
»	4 en remontant	$e^{-h_2x}dx^2$	$e^{-h^2x^2}dx$
50	16	$lx = t$	$hx = t$
»	8 en remontant	dx	dt
»	1 en remontant	$\frac{2}{3}t^0\ldots$	$\frac{2}{3}t^3\ldots$
51	9	$+\frac{1.3}{2^2}\ldots$	$+\frac{1.3}{2^3}$
»	14	$-\frac{e^{-t^2}}{t}$	$-\frac{e^{-t^2}}{2t}$
»	15	$(2t^2)^2$	$(2t^2)^n$
52	17	$\varphi(x)$	$\varphi(x)\,dx$
»	2 en remontant	$\frac{e-t^2}{\tau}$	$\frac{e-t^2}{t}$
55	2	O et A et entre A et O	zéro et a et entre a et zéro
56	1, 3	$\frac{h}{3}, \frac{3}{h}, \frac{3}{h^a}$	$\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4a}$
57	18	$\int_{-x}^{+x}$	$\int_{-x'}^{+x'}$
»	6 en remontant	$e^{-h'x^2}dx$	$e^{-h'x^2}dx$
59	2, 6, 14, 15	$\frac{h}{\sqrt{\pi}}$	$\left(\frac{h}{\pi}\right)^n$
»	4	$+\frac{(\Sigma o)^2}{n}$	$-\frac{(\Sigma o)^2}{n} + \Sigma o^2$
»	15	$\Sigma(\mu-o)h^2(\mu-o)^2$	$\Sigma(\mu-o)-h^2\Sigma(\mu-o)^2$
61	17	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2a}$

Digitized by Google

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
62	1	*fig.* 5	*fig.* 6
»	6	$r = a\ldots$	$r = m\ldots$
»	8	$\frac{4}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi}}$
63	16	$t = 1,100$	$t = 1,000$
»	16	$\Theta(t) = 0,8427005$	$\Theta(t) = 0,8427008$
»	18	$\Theta(t) = 0,19$	$\Theta(t) = 0,99$
»	19	2,317	2,327
64	7	$r = \rho\sqrt{2}$	$r = \rho m\sqrt{2}$
»	7	$m = \ldots$	$r = \ldots$
»	13	*fig.* 4, 5, 7	*fig.* 7, 6, 4
65	15	(§ VIII)	(§ IX, page 56)
66	7	$\omega^2 = \mu_1^2 + \mu\ldots$	$\omega^2 = \mu_1^2 + \mu^2\ldots$
69	10, colonne 5	$- 3,8$	$- 2,8$
70	6 en remontant	$= V + l$	$- V + l$
71	9	$= 0,906$	$= 0,996$
»	27 et 28	0,034	0,036
»	30, colonne 2	12,308	12,508
72	7	$\Theta(1,672)$	$\Theta(1,532)$

13652

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DU

CALCUL DES ERREURS.

I.

INSTRUMENTS D'OBSERVATION. — ERREURS CONSTANTES, INSTRUMENTALES OU PERSONNELLES.

1. Toute observation physique, astronomique ou météorologique peut se réduire à l'*enregistrement d'un nombre*. Mais il est évident que cette opération comporte en général un ensemble d'erreurs numériques, qu'il est bon de démêler et d'étudier pour être à même, soit de les éliminer au besoin, soit d'en fixer les limites, afin que l'observation actuelle puisse être introduite dans les archives de la science avec le degré de confiance qu'elle mérite. Ces quelques mots suffiront pour faire comprendre l'importance du *Calcul des Erreurs*, qui nous enseigne à découvrir et à évaluer les erreurs que nous avons pu commettre dans une série d'observations, et la nécessité pour tout expérimentateur sincère d'en connaître désormais les principales notions.

2. Pour peu que l'on y réfléchisse, on verra que l'observation de tout phénomène se réduit à noter la position

Digitized by Google

qu'occupe un mobile sur un espace gradué, à un instant donné. Le mobile peut être une aiguille d'horloge, un liquide renfermé dans un tube, un astre traversant les fils d'un micromètre, une corde vibrante, etc.; mais en général nous aurons ou un *index tournant* (horloges, anémomètres, galvanomètres, boussoles, compteurs, etc.), ou bien un *index progressif* (flotteurs, indicateurs magnétiques, baromètres, niveaux, cathétomètres, etc.). Il ne peut en être autrement; car, d'une part, tout phénomène se réduit, en dernière analyse, à un déplacement d'atomes, c'est-à-dire au mouvement d'un point; d'autre part, la cinématique nous enseigne que tout mouvement peut toujours se décomposer en mouvements de translation et de rotation. Ainsi tout instrument d'observation se compose : 1° d'un appareil par lequel le mobile suit plus ou moins exactement la marche du phénomène; 2° d'un espace rectiligne ou circulaire parfaitement divisé en parties égales. Le mouvement du mobile est le produit direct ou indirect du phénomène, tandis que l'espace gradué est uniquement le produit de l'art.

Si la correspondance du mobile avec le phénomène n'est pas parfaite, si la graduation n'est pas exacte, les indications de l'instrument seront fautives, soit pour l'une de ces deux causes, soit pour toutes les deux. Ainsi, un thermomètre pourrait avoir une échelle très-bien divisée, mais le mercure, par des défauts intrinsèques de construction ou de préparation, pourrait être paresseux dans sa marche ascendante ou descendante. Au contraire, un cercle d'un théodolite sera bien cintré, fourni d'axes bien horizontaux ou verticaux, mais il aura une mauvaise division, de sorte que les angles lus ne correspondront pas aux angles vrais.

3. On n'obtiendra jamais de l'industrie humaine un instrument tel que la théorie le conçoit, car la main de

Digitized by Google

l'homme ne pourra jamais façonner et dominer la matière jusqu'au dernier point mathématique que conçoit le philosophe. La difficulté presque insurmontable de donner de l'homogénéité à la matière; le poids inévitable de celle-ci; les altérations qu'elle peut subir avec le temps; le jeu même qu'il faut laisser entre les parties afin qu'elles puissent librement se mouvoir les unes sur les autres, mais qui plus tard engendre des soubresauts et des trépidations dans les axes, les tourillons et les disques; la difficulté des divisions, d'autant plus grave qu'on veut l'instrument plus délicat, etc., s'opposeront toujours à ce que l'on atteigne l'idéal de l'instrument que le savant imagine. Ainsi, il faut toujours s'attendre à des erreurs plus ou moins sensibles de construction, selon le talent de l'artiste; et le vrai progrès de la mécanique de précision consistera, non à les supprimer, mais à les atténuer. Et il n'est pas inutile de noter qu'à mesure que l'artiste multiplie les expédients mécaniques pour produire un bon instrument, il se prépare de nouvelles causes d'erreurs dans le maniement de son appareil. Un instrument réduit à ses formes les plus simples, dont on puisse évaluer avec rigueur les erreurs même les plus sensibles, vaudra toujours mieux qu'un autre à formes plus variées et complexes, dont on ne peut pas scinder et explorer les causes d'erreurs, bien qu'individuellement on les ait rendues plus petites.

4. Les erreurs instrumentales se partagent évidemment en *erreurs de graduation* et en *erreurs de marche* dans *le mobile indicateur du phénomène*. Ces erreurs, par la nature même des causes matérielles qui les produisent, sont constantes, au moins pour un certain intervalle de temps. L'emploi plus ou moins fréquent ou prolongé des instruments, la facilité plus ou moins grande avec laquelle leurs diverses parties glissent les unes sur les autres, etc., peuvent en faire varier l'intensité. Par exemple, le colonel Peytier

Digitized by Google

fait observer dans la *Description géométrique de la France* que l'usure des centres tend à accroître les distances zénithales observées avec le théodolite, et que le peu de solidité des vis de rappel, défaut qui peut être amené aussi par le temps, cause de nouvelles et sensibles erreurs dans les observations.

Ces erreurs, bien que constantes en général, comme nous avons dit, peuvent varier aussi, indépendamment du temps, selon les positions diverses que les différentes parties d'un instrument prennent durant les observations. Le défaut, par exemple, de verticalité dans l'axe de rotation d'un théodolite cause évidemment, de prime abord, une erreur constante dans les observations; mais en l'examinant de plus près on s'aperçoit qu'elle varie avec la distance zénithale à laquelle on observe. Il en est de même pour la flexion et pour d'autres causes d'erreurs qu'il est inutile d'énumérer.

5. Il appartient, par suite, à la science de remédier par le calcul à la présence inévitable des erreurs instrumentales et d'en dégager les observations, de telle sorte qu'une fois réduites, elles représentent celles qu'aurait fournies un instrument dépourvu de toute erreur de construction et de maniement. Or il est beaucoup plus facile au savant de découvrir les erreurs et d'en évaluer l'intensité qu'au mécanicien de les supprimer. Le calcul seul annule les erreurs. Le savant, en sondant bien la nature des erreurs, leurs variations, se fabrique un instrument factice parfait, identique pour tout point du globe, et auquel on peut rapporter toutes les observations antérieures et comparer celles qu'on pourrait faire en tout temps et en tout lieu. Ainsi l'astronome, une fois qu'il a observé les étoiles au cercle méridien ou au cercle mural, corrige leurs positions en les réduisant à celles que lui auraient fournies des instruments parfaitement réguliers et situés en un lieu d'une longitude et d'une latitude données. D'après cela,

Digitized by Google

nous n'avons pas à nous inquiéter des erreurs instrumentales que nous pouvons rencontrer, mais plutôt des moyens de les reconnaître et de les éliminer.

6. On peut découvrir les erreurs instrumentales de deux manières : 1° en comparant l'observation actuelle (a) avec celle (b) qu'on pourrait obtenir par d'autres procédés; la différence ($b - a$) sera un indice de l'existence de quelque erreur; 2° en construisant l'instrument de telle sorte que les écarts dans les observations, produits par l'erreur instrumentale dont on soupçonne l'existence, soient tantôt en plus, tantôt en moins du nombre qui devrait représenter l'observation dans le cas où l'instrument serait, par hypothèse, exempt de l'erreur en question.

Supposons, par exemple, qu'on veuille vérifier si dans un cercle méridien il existe une erreur de perpendicularité de l'axe optique sur l'axe de rotation. On fera deux séries d'observations, l'une avec la lunette à droite, l'autre avec la lunette à gauche, tournée de 180 degrés; les points de mire (supposés à une grande distance) ne seront point identiques, si une telle erreur existe, et alors la demi-différence des lectures fournira l'erreur cherchée de collimation. La vérification des niveaux à bulle d'air repose sur le même principe.

Supposons au contraire que l'on veuille constater si le zéro de l'échelle d'un thermomètre A est à sa place, en admettant que le point 100 degrés soit exact. Faisons diverses observations simultanées avec un thermomètre étalon B. Si toutes les différences entre B et A sont positives et donnent pour moyenne 0°,7, cela signifiera que le zéro de A est trop haut de 0°,7 sur le vrai point qu'il devrait occuper.

Selon les divers instruments, la détermination des constantes des erreurs d'observation est plus ou moins compliquée, mais il n'entre pas dans notre plan d'en parler. On

Digitized by Google

trouvera au besoin dans les traités spéciaux les méthodes qui permettent d'arriver à une telle détermination.

7. A mesure qu'on a multiplié les observations et perfectionné parallèlement les théories, la critique des observations est devenue plus exigeante et n'a pas tardé à dévoiler de nouvelles causes constantes d'erreur, qui auparavant se cachaient sous l'apparence de variations inexplicables ou de variations compatibles avec l'incertitude même des observations. On doit précisément à cet échange continuel de comparaisons entre la théorie et les observations le progrès saillant de l'Astronomie sur les autres sciences. On peut dire que la découverte et l'explication de nouvelles erreurs lui procurèrent toujours de nouveaux triomphes. La vitesse et l'aberration de la lumière, la libration de la Lune, la découverte de Neptune, en sont des témoignages irrécusables. Parmi les causes de désaccord dans les observations, on note depuis quelques années une sorte de prédisposition dans l'organisme de la vue de chaque individu, par lequel il lit différemment des autres, ou pour mieux dire par lequel il attribue au même mobile une position différente de celle qu'il paraît avoir pour d'autres observateurs. L'effet produit dans les observations par cette prédisposition organique s'appelle *erreur personnelle* (*). Ainsi le célèbre astronome Airy, directeur de l'Observatoire de Greenwich, nous apprend (voir *les Mondes*, t. II) que pour rendre comparables les observations des passages faites par les observateurs S, E, C, L, IC, K avec celles de M. Dunkin, il faut faire les corrections indiquées dans le tableau suivant :

(*) D'après un beau travail de M. Wolf (*Annales de l'Observatoire impérial*, t. VIII), il résulterait que cette erreur se compose essentiellement de deux parties : l'une, *variable*, qui est due à une éducation incomplète de l'observateur, et que la pratique ou l'emploi d'appareils spéciaux peuvent faire disparaître ; l'autre, *constante*, qui est due à la persistance de l'impression lumineuse sur la rétine.

Digitized by Google

OBSERVATEURS	1860	1861	1862	1863	1864	1865
D.....	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S.....	—0,07	—0,13	—0,14	—0,14	—0,13	—0,09
E..... ..	—0,09	—0,13	—0,15	—0,16	—0,17	—0,15
C.....	+0,14	+0,15	+0,15	+0,16	+0,12	+0,13
L.....	+0,31	+0,35	+0,21	+0,29	+0,30	+0,24
IC.....	+0,13	+0,09	+0,08	+0,07	+0,10	+0,09
K.....	+0,01	+0,01	+0,03	+0,03	—0,08	—0,05

Comme on le voit, l'erreur personnelle peut atteindre, même pour des observateurs exercés, jusqu'à $0^s,5$ dans la lecture du temps, erreur qui n'est pas négligeable, car, dans les positions géographiques, elle amènerait une erreur de 15 mètres environ.

Cette erreur pour le même individu peut être considérée comme constante et figurera comme telle parmi les erreurs constantes et instrumentales. Et, en effet, ce n'est après tout que l'erreur de l'instrument dont l'homme est muni pour voir, et il demeure par sa nature même, invariable, à part les petites variations que l'âge et l'exercice peuvent causer.

Après avoir ainsi exploré la nature des erreurs constantes qu'on peut commettre dans les observations, et après avoir étudié sous chaque face la manière dont elles se comportent, l'observateur instruit pourra toujours, avec des calculs aisés à la vérité, mais souvent bien longs, en déduire les valeurs relatives des observations, qui alors seront comparables et qu'on appellera *réduites,* car elles seront réduites à celles que d'autres observateurs, avec d'égales données, auraient aussi trouvées, dans des conditions différentes et avec d'autres instruments, sauf, bien entendu, les erreurs accidentelles dont nous avons parlé.

Digitized by Google

II.

ERREURS ACCIDENTELLES, LEUR PROBABILITÉ.

8. Une fois qu'on aura éliminé des observations les erreurs constantes, les écarts qu'elles présenteront encore entre elles seront uniquement dus à des *erreurs accidentelles,* c'est-à-dire à des erreurs que l'on pourra attribuer indifféremment à des causes diverses, quoique inconnues. Tandis que le caractère distinctif de l'erreur constante consiste à altérer toujours dans le même sens les observations pour une valeur donnée, celui de l'erreur fortuite ou accidentelle consiste à altérer tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, les observations pour divers degrés de valeur. La première dérive de l'influence qu'exerce *une* certaine cause sur les observations; la seconde, de l'influence que *plusieurs* causes exercent ensemble, causes dont on ignore encore la nature ou la manière d'agir, mais qui après tout peuvent se combiner d'un moment à l'autre, selon des résultantes tout à fait opposées. Mais si par hasard les observations penchent plutôt dans un sens que dans un autre, on devra de suite soupçonner qu'il existe quelque cause qui éloigne les observations de la vraie valeur plutôt dans un sens que dans l'autre. Supposons, par exemple, que l'on ait fait cent observations d'un phénomène A. Si elles ne sont affectées que d'erreurs fortuites, il faudra que les écarts des cent observations par rapport à la vraie valeur numérique a (supposée connue) du phénomène se partagent au-dessus et au-dessous de zéro en une série de nombres positifs ou négatifs d'une valeur presque égale. Car s'il arrivait au contraire que les premières excédassent les secondes d'une quantité constante ε, on devrait conclure qu'une cause constante E, produisant une erreur ε sur les observations, est venue les influencer. En déduí-

Digitized by Google

sant tous ces ε des erreurs positives, les erreurs restantes ne seront que fortuites. Si, par exemple, les cent observations sont faites à moitié par deux observateurs, la différence ε entre les écarts positifs et les écarts négatifs représentera l'erreur personnelle. Si au contraire les cent observations (par exemple de pression atmosphérique) eussent été faites par moitié avec deux baromètres divers, la différence ε pourrait être avec raison attribuée aux conditions physiques diverses des instruments, soit oxydation du mercure, soit imperfection du vide, etc.

9. Supposons, pour plus d'intelligence, qu'on propose à douze personnes de mesurer la ligne $AB = \alpha$ (*fig.* 1);

Fig. 1.

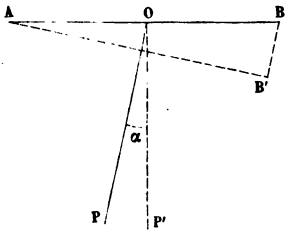
les unes lui attribueront les longueurs $Ac = \gamma$, $Ad = \gamma$; d'autres, les longueurs $Ae = \varepsilon$, $Af = \varphi$. Les erreurs Bc, Bd, Be, Bf, pourvu qu'elles soient entièrement fortuites, seront en plus ou en moins de la vraie mesure AB. Mais si je trouvais que ces erreurs tendent à diminuer plutôt qu'à augmenter la valeur de AB, je chercherais quelle raison peut pousser ces personnes à faire des lectures plutôt dans un sens que dans l'autre. Cela, en vertu d'un principe bien connu, qu'un événement qui arrive plus souvent qu'un autre, indique une cause qui certainement et constamment influe sur son apparition. Je m'apercevrais alors que cela dépend peut être de l'obliquité de la ligne AB par rapport à la position des observateurs, comme dans la *fig.* 2.

Si les observateurs, au lieu d'être sur la perpendiculaire OP′, au centre de la ligne AB, sont sur l'oblique OP, la ligne AB deviendrait AB′ en perspective et serait moindre que la première de $AB(1 - \cos\alpha) = AB \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Je trouve

Digitized by Google

que les différences des erreurs négatives aux positives sont précisément du même ordre ; j'en conclus la probabilité

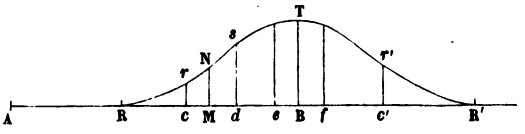
Fig. 2.



très-grande de l'erreur constante AB $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, dont il faut dégager les résultats. Il ne me restera alors que des erreurs entièrement fortuites qui se balanceront d'un côté et de l'autre du point B. Les erreurs pourraient provenir de l'organisation particulière des yeux ou d'autres causes, en dehors de l'obliquité ; mais il n'y a pas lieu de nous arrêter davantage sur ce sujet.

10. Afin donc que les erreurs puissent être considérées comme tout à fait fortuites, c'est-à-dire telles, que par elles-mêmes elles ne puissent pas révéler la cause de leur origine, et qu'elles soient imputables seulement à des causes inconnues, d'égale intensité, il faut que les observateurs aient la même facilité de commettre des erreurs, tant entre B et R qu'entre B et R′, dans l'évaluation de la longueur AB (*fig.* 3).

Fig. 3.



Autrement, si après diverses expériences je trouvais que

Digitized by Google

la même personne incline à faire des erreurs plutôt vers un point M entre c et d que vers un autre point quelconque, je serais en droit de supposer qu'il y a dans son organisme physiologique une tendance à errer, que nous appellerons *errabilité*, représentée par la partie constante MB, et qui pourrait être de suite éliminée en réfléchissant que les observations d'un tel individu deviennent comparables avec les autres, quand on leur ajoute MB; ainsi

$$AM \pm Mc + MB = AB \pm Mc = AB \pm Be,$$

en prenant $Be = Mc$.

Alors son errabilité sera comprise entre les limites $Be = Mc$, $Bf = Md$, à côté du point B.

En passant ainsi en revue tous les individus, et ayant toujours soin d'écarter toutes les erreurs constantes, on s'apercevra que toutes leurs observations sont réductibles à celles d'un seul qui peut indifféremment se tromper de B vers e ou de B vers f.

On conçoit d'ailleurs que les erreurs petites Be, Bf sont plus fréquentes, c'est-à-dire plus probables que les erreurs Bd, Bc, et celles-ci plus probables que les erreurs BR, BR′, limites extrêmes de l'errabilité. Par conséquent, si nous élevons sur les extrémités des abscisses représentant les erreurs à craindre diverses ordonnées égales à leur fréquence, celles-ci formeront une courbe NTR′, qu'on pourra appeler la *courbe de l'errabilité*.

11. Le *premier caractère* de l'erreur accidentelle est ainsi d'altérer indifféremment en plus ou en moins une quantité qu'il s'agit de déterminer.

Le *second caractère* consiste à osciller entre des limites assignables et généralement assez restreintes. Ces limites varient évidemment selon le degré de perfection des instruments, l'habileté des observateurs, le genre des observations. Dans les observatoires astronomiques actuels, par

Digitized by Google

exemple, la lunette méridienne, les micromètres, la pendule sidérale, etc., sont portés à un tel point de perfection, et l'habileté que l'on est en droit d'attendre de l'observateur est telle, que toute erreur au-dessus de $0^s,6$ ne peut plus être considérée comme accidentelle, et $0^s,6$ sera par conséquent la limite des erreurs fortuites dans les observations d'ascension droite. S'il s'agit d'un théodolite, on pourra répondre de $5''$, $3''$ ou $1''$, selon son diamètre et la graduation ; s'il s'agit d'un thermomètre, on pourra négliger, suivant les divisions que l'on y aura tracées, toute erreur au-dessous de $\frac{1}{10}$ ou de $\frac{1}{20}$ de degré. De facon que si un observateur muni d'un théodolite donnant les secondes présente des séries d'observations où, tout calcul fait, on trouve des erreurs fortuites supérieures à $1''$, on devra les attribuer à sa négligence dans le pointé, dans le nivellement, etc., mais on ne pourra considérer les erreurs comme fortuites, et les séries devraient être rejetées.

Le *troisième caractère* est que les erreurs vraiment accidentelles ne se commettent pas toutes également avec la même facilité, mais que les petites se présentent plus facilement que les grandes. Autrement il faudrait nier la perfectibilité humaine à observer, absurdité évidente. Il y aurait même contradiction ; car, en vertu d'une hypothèse tacite, mais très-naturelle, on regarde précisément comme étant la vraie valeur celle vers laquelle convergent les observations. J'observe la température a sur un thermomètre divisé en demi-degrés ; toutes mes erreurs possibles seront comprises entre $a - 0^0,5$ et $a + 0^0,5$; mais il est clair que les vraies lectures seront plus proches de la hauteur a du mercure que les limites $a \mp 0^0,5$. En supposant donc que x soit une erreur possible comprise entre o et λ, λ étant la limite de ces erreurs, la facilité de commettre cette erreur sera d'autant plus grande que x sera plus petit. On conçoit ainsi aisément que selon *la manière dont varie cette facilité*, le résultat final déduit d'une série d'observations

Digitized by Google

comportera une erreur plus ou moins grande; par suite, il importe d'approfondir l'étude de cette probabilité des erreurs, ce qui sera le sujet de chapitres ultérieurs.

III.

THÉORIE DES MOYENNES.

12. Soient a et b, b étant $> a$, deux nombres fournis par deux observations d'une quantité x qu'il s'agit de déterminer. Il est clair que personne ne voudra adopter a plutôt que b ou *vice versâ* pour la valeur de x, en supposant que les observations soient également plausibles; mais tout le monde admettra volontiers que la valeur de x est comprise entre a et b. Et comme il n'y a pas de raison pour qu'elle se rapproche plus de a que de b, ou inversement, cette valeur doit être telle, que ses différences avec a et b soient égales. On devra donc avoir

$$b - x = x - a;$$

d'où

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Donc, dans ce cas, la valeur la plus plausible de x est la moyenne entre les deux quantités.

S'il s'agit de quatre valeurs observées de x, par exemple a, b, c, d, la valeur la plus plausible est encore la moyenne

$$\frac{a+b+c+d}{4}.$$

En effet, d'après le principe ci-dessus, on peut remplacer les deux observations a, d par une seule, $\frac{a+d}{2}$, et les deux observations b, c par une autre seule, $\frac{b+c}{2}$. Or la

Digitized by Google

moyenne entre ces deux nouvelles quantités est

$$x = \frac{\frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

On conçoit aisément que pour un nombre pair $2n$ d'observations la valeur la plus plausible est la moyenne

$$\frac{a+b+c+d+\ldots}{2n},$$

c'est-à-dire la somme des quantités observées divisées par leur nombre.

La même chose a lieu pour un nombre impair $2n+1$ de quantités,

$$a, b, c, d, \ldots, i, k, l;$$

car, d'après les principes ci-dessus, ces $2n+1$ quantités peuvent être remplacées de $(2n+1)$ manières par des expressions de cette forme :

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{b+c+d+\ldots}{2n}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(b + \frac{a+c+d+\ldots}{2n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(l + \frac{a+b+c+\ldots+k}{2n}\right),$$

et comme il n'y a pas de raison d'adopter l'une plutôt que l'autre, et qu'elles peuvent toutes représenter la valeur cherchée de x, en les sommant on aura $(2n+1)$ fois cette valeur, et, par conséquent,

$$(2n+1)x = \frac{1}{2}\left(\Sigma a + \frac{2n\Sigma a}{2n}\right) = \Sigma a;$$

d'où, comme précédemment,

$$x = \frac{\Sigma a}{2n+1}.$$

Digitized by Google

Ainsi serait justifiée cette règle bien vulgaire et dictée par le seul bon sens, que la valeur la plus plausible de x, fournie par plusieurs observations, est égale à la moyenne des valeurs observées. En appelant donc o, o', o'', ... les résultats de n observations, et x la valeur cherchée, on aurait

$$x = \frac{\Sigma o}{n}.$$

13. Il nous reste encore à examiner si vraiment la moyenne arithmétique est la valeur qu'il convient le plus d'adopter quand la quantité qu'il s'agit de déterminer est connue par plusieurs observations. Quoiqu'il semble, d'après ce que nous avons dit au commencement de ce chapitre, qu'il ne doive pas y avoir de doute à cet égard, nous ajouterons encore le raisonnement suivant. Si les observations étaient tout à fait exactes, les différences de la valeur cherchée avec les valeurs fournies par les observations seraient nulles. Donc la valeur la plus plausible, à savoir celle qui se rapproche le plus de cette vraie valeur, sera celle dont les différences avec les valeurs observées seront les plus petites. Si cela est, il faudra aussi que la somme de ces différences prises en valeur absolue soit la plus petite possible. Pour réaliser cette condition algébriquement, nous dirons que la somme des carrés des erreurs doit être un *minimum*. Soit donc Q cette valeur la plus plausible, il faudra que

$$(Q - o)^2 + (Q - o')^2 + (Q - o'')^2 + \ldots = \text{minimum}.$$

Mais on a

$$\Sigma(Q - o)^2 = nQ^2 - 2Q\Sigma o + \Sigma o^2 = n\left(Q - \frac{\Sigma o}{n}\right)^2 + \Sigma o^2 - \frac{(\Sigma o)^2}{n},$$

où $\Sigma o^2 - \frac{(\Sigma o)^2}{n}$ est une quantité donnée. Or le seul moyen de rendre un minimum le deuxième membre, c'est d'égaler à o le carré $\left(Q - \frac{\Sigma o}{n}\right)^2$, qui seul est susceptible de

Digitized by Google

varier. Cela posé, il viendra

$$Q = \frac{\Sigma o}{n} = \mu;$$

donc la moyenne est bien la valeur la plus plausible.

C. Q. F. D.

14. Notons à présent que cette valeur de x peut ou non se confondre avec la vraie valeur de la quantité qu'il s'agit de déterminer. La tension maximum, par exemple, d'une vapeur donnée à un degré donné de température est une quantité certainement fixe, unique. On pourra multiplier les expériences autant que l'on voudra, mais on ne sera jamais assuré que la moyenne représente cette tension. Il est donc de toute importance de nous rendre compte de l'erreur à laquelle on s'expose lorsqu'on substitue la moyenne à la vraie valeur que l'on cherche.

Soit X cette valeur; on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} X = o + \Delta, \\ X = o' + \Delta', \\ X = o'' + \Delta'', \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

et par suite

$$nX = \Sigma o + \Sigma\Delta,$$

d'où

$$(2) \qquad X = \frac{\Sigma o}{n} + \frac{\Sigma\Delta}{n}.$$

Appelons μ la moyenne arithmétique $\frac{\Sigma o}{n}$, et posons

$$(3) \qquad \lambda = \frac{\Sigma\Delta}{n},$$

il viendra

$$(4) \qquad X = \mu + \lambda.$$

Digitized by Google

Mais comme

$$\Sigma\Delta = \Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots,$$

nous aurons aussi

$$\lambda^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{n^2} + 2\,\frac{\Sigma\Delta\Delta'}{n^2}. \tag{5}$$

Faisons maintenant

$$m^2 = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}} \tag{6}$$

qu'on pourra appeller la *moyenne des erreurs,* on aura

$$\lambda^2 = \frac{m^2}{n} + 2\,\frac{\Sigma\Delta\Delta'}{n^2}. \tag{7}$$

Mais les erreurs Δ étant par hypothèse entièrement fortuites, il est évident que sur un grand nombre d'observations elles seront à fort peu près deux à deux égales et de signe contraire, de sorte que les produits $\Delta\Delta'$ seront deux à deux aussi de signes contraires, et la somme $\Sigma\Delta\Delta'$ s'annulera.

Il viendra donc simplement

$$\lambda^2 = \frac{m^2}{n},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^2}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt{\Sigma\Delta^2}. \tag{8}$$

Telle est, avec une grande approximation, l'erreur à laquelle on peut s'attendre lorsque, au lieu de la vraie valeur X, on prend la moyenne μ.

Donc l'*erreur* commise dans ce cas est égale à la *racine carrée de la somme des carrés des erreurs divisée par le nombre des observations.*

15. Pour évaluer pratiquement une telle erreur, il serait nécessaire de connaître d'avance les erreurs Δ, ce qui revient implicitement à admettre comme connue la vraie

Digitized by Google

valeur de X, que précisément nous ignorons, et qu'il s'agit au contraire de déterminer, au moins avec une approximation suffisante. Voyons, par conséquent, quelle erreur nous commettrons lorsque, au lieu de déduire les Δ de la vraie valeur de X, on les déduira de sa valeur approchée, c'est-à-dire de la moyenne arithmétique des observations.

Soient donc $\delta, \delta', \delta'', \ldots$, les *écarts* ou les différences entre la valeur approchée de X et chaque observation, on aura

$$(9) \qquad \mu = o + \delta, \quad \mu = o' + \delta', \quad \mu = o'' + \delta'', \ldots.$$

Mais des équations (1) et (4) on tire

$$X = \mu + \lambda = o + \Delta, \quad \mu + \lambda = o' + \Delta', \quad \mu + \lambda = o'' + \Delta'', \ldots,$$

et en remplaçant o, o', $o'', \ldots$ par leur valeur (9), il viendra

$$\Delta = \lambda + \delta, \quad \Delta' = \lambda + \delta', \quad \Delta'' = \lambda + \delta'', \ldots;$$

d'où

$$\Sigma\Delta^2 = n\lambda^2 + 2\lambda\Sigma\delta + \Sigma\delta^2.$$

Mais comme μ est la moyenne des observations, on a $\Sigma\delta = 0$; et puisque

$$n\lambda^2 = m^2, \quad m^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{n},$$

on aura aussi

$$nm^2 = m^2 + \Sigma\delta^2,$$

d'où enfin

$$(10) \qquad m = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}.$$

La valeur de λ, que dans ce cas nous appellerons spécialement E, sera alors

$$(11) \qquad E = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}}.$$

Appelons maintenant ε ce que devient m dans le cas actuel d'une valeur approchée μ de X; ce sera la moyenne

Digitized by Google

des erreurs ou l'*erreur moyenne des observations*. On aura

$$(12) \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}, \quad E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}};$$

par conséquent : 1° *l'erreur moyenne des observations est égale à la racine carrée de la somme des carrés des écarts divisée par le nombre des observations moins un*; 2° *l'erreur commise sur la moyenne des observations est égale à l'erreur moyenne des observations divisée par la racine carrée du nombre des observations.*

En résumant ce que nous venons d'apprendre, voici la règle pratique pour trouver la valeur la plus plausible pour un système donné d'observations également bonnes.

Soient o, o', o'', ... *les valeurs fournies par* n *observations d'une quantité* X *qu'il s'agit de déterminer;*

Calculez la moyenne arithmétique $\mu = \frac{\Sigma o}{n}$, *qui sera la valeur la plus plausible de* X;

Calculez les écarts entre les valeurs observées o *et la moyenne* μ, *c'est-à-dire les différences* $\mu - o = \delta$;

L'erreur à craindre sur chaque observation sera

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}},$$

et l'erreur à craindre sur la moyenne μ *sera*

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}}.$$

16. Exemple. — On a observé dans un certain lieu de la terre l'étoile polaire, afin de déterminer la latitude de ce lieu, et l'on a obtenu les résultats suivants (*) :

(*) On calculera facilement les δ^2 avec les Tables à la fin de l'Ouvrage.

Digitized by Google

	ANGLES OBSERVÉS.	δ	δ^2
1	$55^{\circ}.42'.22'',13$	$+ 2'',42$	5,856
2	19,24	— 0,47	0,221
3	19,19	— 0,52	0,270
4	20,09	+ 0,98	0,960
5	21,84	+ 2,13	4,577
6	19,76	+ 0,05	0,002
7	17,62	— 2,09	4,268
8	18,90	— 0,72	0,518
9	18,26	— 0,45	0,203
10	19,13	— 0,58	0,336
11	19,24	— 0,47	0,221
12	19,42	— 0,29	0,084
	Moy. arith. 19,72	$\Sigma\delta = 11,17$	$\Sigma\delta^2 = 17,756$

Dans ce cas on obtiendra pour la valeur la plus probable de la latitude

$$X = \frac{\Sigma o}{n} = 55^{\circ}42'10'',72,$$

et

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{17,756}{11}} = 1'',264,$$

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}} = \frac{1'',264}{\sqrt{12}} = 0'',365.$$

Donc

$$X = 55^{\circ}42'19'',72 \pm 0'',365.$$

17. D'après les considérations exposées ci-dessus, on voit que l'erreur E commise sur le résultat final ne représente pas exactement, mais seulement approximativement, la différence $X - \frac{\Sigma o}{n}$. Il est naturel, par conséquent, de se demander quelle confiance on peut accorder à une erreur

Digitized by Google

ainsi calculée, entre quelles limites elle est comprise, ou bien jusqu'à quel point elle est probable.

A cette question, comme nous le verrons dans la suite, le calcul de la probabilité des erreurs répond que l'erreur commise sur l'évaluation de E est comprise entre $+ 0{,}6745\,E$ et $- 0{,}6745\,E$.

Appelons donc R l'erreur commise probablement sur E, on aura

$$R = 0{,}6745\,E = 0{,}6745\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}},$$

et pour l'erreur moyenne ε des observations,

$$r = 0{,}6745\,\varepsilon = 0{,}6745\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}.$$

Ainsi dans l'exemple ci-dessus on aura

$$R = 0{,}6745 . 0'',365 = 0'',246.$$

Cela signifie qu'il y a 1 contre 1 à parier qu'en répétant les mêmes observations on commettra une erreur r sur chaque observation et une erreur R sur le résultat final.

Il est évident qu'on peut considérer l'observation comme d'autant plus *précise*, c'est-à-dire plus voisine de la vérité, que r est plus petit. Par conséquent, la quantité r peut servir à donner une idée de la précision avec laquelle ont été faites les observations.

18. Exemple. — Le P. Secchi a fait, dans la mesure de la base Appienne, les lectures suivantes pour les fils d'un microscope :

Digitized by Google

	DISTANCES			
	du 1er au 2e fil.	du 2e au 3e fil.	du 3e au 4e fil.	du 4e au 5e fil.
	m	m	m	m
	0,900	0,865	0,845	
	0,890	0,855	0,845	0,870
	0,900	0,875	0,865	0,865
	0,885	0,865	0,830	0,855
	0,895	0,885	0,865	0,850
	0,900	0,870	0,840	0,880
	0,895	0,875	0,850	0,865
	0,895	0,875	0,855	0,845
	0,895	0,860	0,865	0,860
	0,895	0,865	0,870	0,855
	0,900	0,850	0,865	0,850
	0,900	0,853	0,867	0,860
	0,900	0,870	0,860	0,860
	0,905	0,855	0,863	0,853
	8,895	0,875	0,850	0,865
	0,900	0,875	0,845	0,865
Moyennes.	0,897	0,867	0,856	0,860

On trouvera pour les intervalles

	r	R
Du 1er au 2e fil.....	0,0031	0,0008
Du 2e au 3e fil.....	0,0064	0,0016
Du 3e au 4e fil.....	0,0082	0,0020
Du 4e au 5e fil.....	0,0062	0,0015

IV.

POIDS DES OBSERVATIONS.

19. Plus les circonstances qui accompagnent une observation (méthode, instruments, personnel, temps disponible, état météorologique de l'atmosphère, etc.) concourent à la rendre bonne, c'est-à-dire à la rapprocher davantage de la vérité, plus elle méritera notre confiance, et aura

Digitized by Google

du *poids* dans nos déductions logiques. On comprend d'ailleurs que deux observations ou deux séries d'observations puissent ne pas être également bonnes : comment donc les comparer entre elles sous le rapport de la précision ? Nous aurons recours au *criterium* suivant. Un système d'observations, toutes également bonnes, mérite évidemment d'autant plus de confiance pour les conséquences que nous voulons en tirer, qu'il en embrasse un plus grand nombre. Nous avons vu, en effet, que l'erreur à craindre sur le résultat est égale à

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

et que, par conséquent, elle diminue en raison inverse du nombre des observations. On voit ainsi que l'on peut représenter le degré de confiance que mérite une observation par le nombre d'observations d'une précision constante requises pour obtenir la précision de l'observation que l'on considère. Par suite, le *poids* d'une observation qui a fourni la valeur $x = A$ est le nombre d'observations d'égale précision qui donnerait lieu à la même erreur que l'on aurait à craindre sur le résultat $x = A$.

Ainsi, par exemple, une observation vaudra comme 5, une autre comme 9 ; cela signifie que la bonté de la première observation est équivalente à 5 observations et la seconde à 9 observations d'un précision donnée a. On pourra donc admettre que le *poids* d'une observation *peut être représenté par le nombre d'observations toutes d'égale précision propres à fournir la quantité cherchée avec une précision égale à celle d'une seule observation*, c'est-à-dire, plus clairement, propres à fournir un résultat moyen, passible de la même erreur probable que le résultat de la seule observation.

20. Nous avons vu que l'erreur probable R est expri-

Digitized by Google

mée par l'équation

$$R = 0,6745E.$$

Mais on a

$$(1) \qquad E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad n = \frac{\varepsilon^2}{E^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

pour un système donné d'observations, et pour un autre

$$(2) \qquad E' = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad n' = \frac{\varepsilon'^2}{E'^2} = \frac{r'^2}{R'^2}.$$

Supposons maintenant que les erreurs ε, que l'on peut craindre pour chaque observation, soient égales, ou, pour mieux dire, également probables, à savoir $r = r'$; alors il viendra

$$nR^2 = n'R'^2,$$

ou bien

$$(3) \qquad n : n' :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2},$$

ou encore

$$(4) \qquad n : n' :: \frac{1}{E^2} : \frac{1}{E'^2};$$

et comme par définition, dans le cas d'observations également bonnes, on a, en appelant p, p' les poids des deux systèmes d'observations,

$$p : p' :: n : n',$$

il viendra

$$(5) \qquad p : p' :: \frac{1}{E^2} : \frac{1}{E'^2} :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2}.$$

D'où il résulte que les nombres, c'est-à-dire les *poids* des observations (en les supposant toutes d'égale précision) *sont inversement proportionnels aux carrés des erreurs probables à craindre sur le résultat final.* En d'autres termes,

Digitized by Google

en appelant p le poids d'un système d'observations, on aura

$$p = \frac{K}{R^2}, \tag{6}$$

et enfin,

$$p = \frac{K}{E^2}, \tag{7}$$

K étant une constante quelconque.

21. Si l'on remplace R et E par leurs valeurs (§ III), l'équation (7) devient

$$p = \frac{K}{(0,6745)^2} \frac{n(n-1)}{\Sigma\delta^2};$$

et, en observant que l'on a

$$0,6745 = \rho\sqrt{2}, \quad \rho = 0,4769,$$

comme on verra au § X, il vient

$$p = \frac{K}{2\rho^2} \frac{n(n-1)}{\Sigma\delta^2}; \tag{8}$$

pour n suffisamment grand, on a sensiblement

$$p = L \frac{n^2}{2\Sigma\delta^2}; \tag{9}$$

L étant une constante.

On déduit aussi des principes exposés que *le poids de la moyenne de n observations est n fois le poids d'une observation simple.* En effet, soit P le poids de la moyenne, et p celui d'une observation simple, on aura

$$P : p :: \frac{k}{E^2} : \frac{k}{\varepsilon^2},$$

E, ε étant toujours les erreurs de la moyenne et d'une observation. Mais on a

$$E^2 = \frac{\varepsilon^2}{n};$$

Digitized by Google

donc

$$P = p\frac{\varepsilon^2}{E^2} = np. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Notons encore que, pour des observations inégalement bonnes, on aura

$$(10) \qquad p : p' :: \frac{\varepsilon^2}{E^2} : \frac{\varepsilon'^2}{E'^2} :: \frac{r^2}{R^2} : \frac{r'^2}{R'^2},$$

et, en général, quelles que soient les observations,

$$(11) \qquad p = \frac{\varepsilon^2}{E^2} = \frac{r^2}{R^2}, \quad \varepsilon = E\sqrt{p}, \quad r = R\sqrt{p},$$

$$(12) \qquad p' = \frac{\varepsilon'}{E'^2} = \frac{r'^2}{R'^2}, \quad \varepsilon' = E'\sqrt{p'}, \quad r' = R'\sqrt{p'}.$$

22. Exemple I. — *On a fait pour la mesure d'un angle cinq séries d'observations, dont les erreurs probables sont respectivement*

$$1'',20, \quad 0'',80, \quad 1'',60, \quad 0'',50, \quad 1'',1.$$

Quels seront les poids correspondants des observations?

D'après la formule (2) ils seront

$$\frac{K}{1,44}, \quad \frac{K}{0,64}, \quad \frac{K}{2,56}, \quad \frac{K}{0,25}, \quad \frac{K}{1,21},$$

et par conséquent (en prenant $K = 100$) ils seront à peu près proportionnels à

$$7, \quad 15, \quad 4, \quad 40, \quad 8.$$

Cela nous apprend qu'on peut réduire les 5 séries d'observations, quelles qu'elles soient, à 5 autres, toutes également bonnes, mais au nombre de 7 pour la première, de 15 pour la deuxième, de 4 pour la troisième, de 40 pour la quatrième, de 8 pour la cinquième. Nous pourrons ainsi comparer une observation à une autre, et dire, par exemple,

Digitized by Google

que les observations de la première série valent ou *pèsent* 10 fois plus que celles de la troisième, et ainsi de suite.

23. Exemple II. — *Supposons que l'inexpérience d'un observateur soit telle, qu'on ait à craindre de lui une erreur deux fois plus grande que d'un autre observateur. Quel sera le poids de ses observations?*

R. — Le poids sera $= \frac{1}{4}$; c'est-à-dire son observation vaudra $\frac{1}{4}$ de celle de l'autre observateur, et pour rendre comparables les deux résultats, il faudra que le premier fasse un nombre quadruple d'observations.

24. Exemple III. — *On a déterminé la latitude λ d'un lieu donné par deux séries d'observations, l'une faite avec un sextant, l'autre avec un théodolite. On a trouvé pour la première et pour la seconde série respectivement les valeurs*

$\lambda_1 = 49^\circ\,16'\,13''$, avec une erreur probable R_1 de $\pm 5''$,
$\lambda_2 = 49^\circ\,16'\,10''$, » » R_2 de $\pm 3''$.

On demande quelle est la valeur la plus probable de la latitude et quelle est l'erreur à craindre sur le résultat.

Appelons p_1, p_2 les poids des deux séries d'observations, on aura

$$p_1 = \frac{K}{5^2}, \quad p_2 = \frac{K}{3^2},$$

et, en prenant $K = 15^2$, ils deviendront

$$p_1 = 9, \quad p_2 = 25.$$

Ces nombres signifient que la première valeur de λ est équivalente à la moyenne de 9 et, la seconde, à la moyenne de 25 observations d'égale précision. Par conséquent, la somme $9\lambda_1 + 25\lambda_2$ est équivalente à celle que fourniraient 34 observations, toutes de même poids; en la divisant donc

Digitized by Google

par 34, c'est-à-dire par le nombre des observations, on aura naturellement la valeur moyenne de ces observations. Appelons-la L, il viendra

$$L = \frac{9\lambda_1 + 25\lambda_2}{34} = 49°16' + \frac{9.13'' + 25.10''}{34} = 49°16'10'',8.$$

25. Cherchons maintenant l'erreur probable η correspondante à l'unité de poids.

D'après les équations (11) et (12) l'erreur probable η_1, correspondante à l'unité de poids, sera

$$\eta = R_1\sqrt{p_1},$$

ou encore

$$\eta = R_2\sqrt{p_2},$$

et par suite

$$\eta = \sqrt{\frac{p_1 R'^2_1 + p_2 R^2_2}{2}}.$$

Appelons maintenant P le poids du résultat final L; nous aurons évidemment

$$P = p_1 + p_2;$$

et pareillement

$$\eta = R\sqrt{P},$$

R désignant l'erreur probable de la moyenne L. En comparant les équations, nous aurons

$$(13) \qquad R = \sqrt{\frac{p_1 R^2_1 + p_2 R^2_2}{2(p_1 + p_2)}},$$

et, eu égard à la relation (6),

$$(14) \qquad R = \sqrt{\frac{K(1+1)}{2(p_1+p_2)}} = \sqrt{\frac{K}{p_1+p_2}} = \sqrt{\frac{K}{P}},$$

Digitized by Google

ou encore

$$(15)\quad R=\sqrt{\frac{K}{p_1+p_2}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}}}=\sqrt{\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}}.$$

Dans le cas actuel $R_1=5$, $R_2=3$, et, par conséquent,

$$R=\sqrt{\frac{25.9}{25+9}}=3'',5.$$

La valeur de la latitude $L=49°16'10'',8$ serait donc exacte entre les limites $\pm 3'',5$.

Notons que l'expression de R peut encore se mettre sous la forme

$$R=\frac{1}{P}\sqrt{p_1^2R_1^2+p_2^2R_2^2}.$$

En effet, on a

$$R=\sqrt{\frac{K}{p_1+p_2}}=\sqrt{\frac{K(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2}}=\frac{1}{P}\sqrt{p_1(p_1R_1^2)+p_2(p_2R_2^2)},$$

d'après les relations (6), ou enfin

$$(16)\qquad R=\frac{1}{P}\sqrt{p_1^2R_1^2+p_2^2R_2^2}.$$

26. En général, étant données diverses valeurs de x par le moyen de n séries d'observations,

$$(17)\quad\begin{cases} x=a_1 \text{ avec le poids } p_1 \text{ et l'erreur probable } r_1,\\ x=a_2 \quad\text{»}\quad p_2 \quad\text{»}\quad r_2,\\ x=a_3 \quad\text{»}\quad p_3 \quad\text{»}\quad r_3,\\ \ldots\ldots \quad\quad .. \quad\quad ..\\ x=a_n \quad\text{»}\quad p_n \quad\text{»}\quad r_n, \end{cases}$$

Digitized by Google

la valeur la plus plausible de x sera

$$(18) \qquad X = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n},$$

et le poids sera

$$(19) \qquad P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n.$$

On aura encore, en suivant la même marche qu'auparavant,

$$(20) \qquad R = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \ldots + \frac{1}{r_n^2}}},$$

$$(21) \qquad R = \frac{1}{P}\sqrt{p_1^2 r_1^2 + p_2^2 r_2^2 + p_3^2 r_3^2 + \ldots + p_n^2 r_n^2}.$$

V.

THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS.

27. Supposons qu'eutre des quantités données et i quantités inconnues qu'il s'agit de déterminer, il existe un nombre p d'équations de condition, supérieur à celui des inconnues. Il est évident qu'en combinant i à i les p équations, on obtiendra divers systèmes de valeurs pour les i inconnues propres à satisfaire à une partie, mais non à la totalité des équations. On ne saurait pas au premier abord lequel préférer de ces différents systèmes, et on n'aurait pas d'autre criterium pour choisir l'un plutôt que l'autre, que de les substituer successivement dans les équations de condition, et de voir quel est celui qui, avec les $p - i$ équations restantes, fournirait un système d'erreurs, c'est-à-dire d'écarts de o, les plus petits possible. Ce serait une opération très-longue, presque impraticable, qui du reste ne conduirait pas sûrement au but; car, alors même que l'on connaîtrait les vraies valeurs des inconnues, il pourrait très-bien arriver que leur substitution dans les p équa-

Digitized by Google

tions produisît des écarts encore plus grands que ceux obtenus par la méthode précédente, ce qui proviendrait évidemment de l'imperfection des observations qui ont fourni les p équations. Au milieu de ces incertitudes et de ces difficultés, le parti suivant paraît préférable.

Parmi toutes les valeurs que l'on peut attribuer aux inconnues, on préférera celles qui, substituées dans les équations, fourniront des différences avec o (prises en valeur absolue, c'est-à-dire abstraction faite du signe) les plus petites possibles; car il est évident que, dans la question actuelle, peu importe le signe de l'erreur, pourvu que l'on songe à en diminuer la grandeur absolue. Les écarts devront même être tantôt d'un signe, tantôt d'un autre, puisque, dans le cas contraire, comme nous l'avons déjà maintes fois observé, il y aurait lieu de croire à des erreurs systématiques. Mais pour remplir analytiquement cette condition, à savoir de ne tenir compte que des valeurs absolues des erreurs, le moyen le plus naturel c'est d'en considérer les carrés, et ensuite de faire en sorte que la somme de ces carrés soit un minimum.

28. L'application de cette méthode dans les divers cas que l'étude de la nature peut présenter, forme précisément l'objet de la théorie des moindres carrés.

Deux exemples suffiront à éclaircir ce qui précède.

1° L'étude des oscillations du pendule à diverses latitudes amena les physiciens à conclure que la longueur λ du pendule qui bat la seconde dépend de la latitude ψ du lieu, selon une loi déterminée exprimée par l'équation

$$\lambda = x + y \sin 2\psi,$$

où x, λ sont deux longueurs qu'il s'agit de trouver. Divers observateurs célèbres firent à cet égard des expériences que nous reproduisons dans le tableau suivant :

Digitized by Google

LIEUX de l'observation.	LATITUDE.	LONGUEUR du pendule.	NOMS des observateurs.
Pérou.....	0,0	0,990564	Bouguer.
Petit-Goave.....	18,27′	0,991150	Bouguer.
Paris.....	48,24	0,993867	Biot et Mathieu.
Saint-Pétersbourg.	58,15	0,994589	Mallet.
Laponie....	67, 4	0,995325	Clairaut et Maupertuis.

Les résultats de ces observations, substitués dans l'équation précédente, donnent les cinq équations de condition :

$$x + y.0,00000 - 0,990564 = 0,$$
$$x + y.0,10016 - 0,991150 = 0,$$
$$x + y.0,56672 - 0,993867 = 0,$$
$$x + y.0,72307 - 0,994589 = 0,$$
$$x + y.0,84829 - 0,995325 = 0.$$

Si on leur applique la méthode des moindres carrés dont nous parlerons tout à l'heure, elles se trouveront remplacées par les deux suivantes

$$x + y.0,44765 - 0,993099 = 0,$$
$$x + y.0,70306 - 0,994548 = 0,$$

bien propres à fournir un minimum pour la somme des écarts; on en déduira

$$x = 0^m,990555, \quad y = 0^m,0056786,$$

et, par conséquent,

$$\lambda = 0^m,990555 + 0^m,005679 \sin 2\psi.$$

29. Les variations diurnes barométriques, selon divers météorologistes, paraissent dépendre de la latitude, de l'altitude et de la température du lieu. Voulant chercher jusqu'à quel point, pour un même lieu, elles peuvent va-

Digitized by Google

rier avec la température, j'ai déduit, des observations quotidiennes du professeur chanoine Parnisetti, d'Alexandrie, la moyenne des résultats moyens barométriques et thermométriques pour les cinq années 1861-1865; je les résume dans ce tableau :

Décembre..	$100 = x + y.2,15$	Juin.....	$115 = x + y.22,54$
Janvier ...	$73 = x + y(-0,37)$	Juillet....	$140 = x + y.25,12$
Février....	$93 = x + y.\ 2,93$	Août.....	$136 = x + y.24,50$
Mars.....	$98 = x + y.\ 9,97$	Septembre.	$131 = x + y.20.30$
Avril.....	$126 = x + y.14,58$	Octobre...	$109 = x + y.14.00$
Mai.....	$113 = x + y.12,54$	Novembre.	$90 = x + y.\ 7,00$

où les premiers membres expriment les variations barométriques de 9 heures à 3 heures de l'après-midi, exprimées en $\frac{1}{100}$ de millimètre, et les seconds membres représentent les températures moyennes en degrés centésimaux. En appliquant la méthode des moindres carrés, on trouve que, en désignant par v la variation diurne barométrique et t la température, on a, pour Alexandrie,

$$v = 81 + 2,2t,$$

ce qui prouverait une certaine influence due à la température.

VI.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS POUR DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

30. Pour plus de simplicité, considérons un système d'équations à trois inconnues seulement; le raisonnement ne perdra nullement de sa généralité.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Digitized by Google

les équations de condition. Soient ε, ε', ε'', ε''',... les résultats de la substitution des valeurs des inconnues, que nous nous proposons de déterminer, dans les premiers membres des équations susdites. Si ces valeurs étaient vraies, les ε seraient nuls; mais comme elles ne sont qu'approchées, ces ε seront les erreurs commises, et elles exprimeront de combien les premiers membres diffèrent de o. Or, afin que ces valeurs, par les raisons ci-dessus exposées, puissent être pour nous les plus plausibles, il faudra que, en vertu des principes exposés, la somme

$$(2) \qquad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \ldots = \text{minimum.}$$

En supposant, pour un instant, que les x, y, z,... représentent les valeurs les plus plausibles, l'équation (2) deviendra

$$(3) \quad \begin{cases} (ax+by+cz+d)^2 + (a'x+b'y+cz'+d)^2 \\ \qquad + (a''x+b''y+c''z+d)^2 + \ldots = \text{min.} \end{cases}$$

Mais, par des théories bien connues, pour que les valeurs x, y, z,... rendent le premier membre un minimum, il faut que les dérivées relatives à chaque inconnue s'annulent. On aura donc successivement pour D_x, D_y, D_z,...

$$(4) \quad \begin{cases} (ax+by+cz+d)\,a + (a'x+b'y+c'z+d')\,a' \\ \qquad + (a''x+b''y+c''z+d'')\,a'' + \ldots = 0, \\ (ax+by+cz+d)\,b + (a'x+b'y+c'z+d')\,b' \\ \qquad + (a''x+b''y+c''z+d'')\,b'' + \ldots = 0, \\ (ax+by+cz+d)\,c + (a'x+b'y+c'z+d')\,c' \\ \qquad + a''x+b''y+c''z+d'')\,c'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \Sigma a^2x + \Sigma aby + \Sigma acz + \Sigma ad = 0, \\ \Sigma abx + \Sigma b^2y + \Sigma bcz + \Sigma bd = 0, \\ \Sigma acx + \Sigma bcy + \Sigma c^2z + \Sigma cd = 0, \end{cases}$$

qui seront les équations normales que l'on cherchait. En

Digitized by Google

résolvant ces trois équations à trois inconnues, on obtiendra les valeurs cherchées de x, y, z. On voit, en général, qu'ayant autant d'équations de la forme (4) qu'il y a de données et partant d'inconnues, ce procédé conduira toujours à un nombre d'équations égal à celui des inconnues, d'où elles pourront toujours être éliminées.

Observons en passant que les coefficients des inconnues dans les équations (5) forment un déterminant symétrique par rapport à la diagonale, savoir :

$$(6) \qquad \begin{cases} \Sigma a^2, & \Sigma ab, & \Sigma ac, \\ \Sigma ab, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, \\ \Sigma ac, & \Sigma bc, & \Sigma c^2; \end{cases}$$

et que, par suite, il suffira d'en calculer une partie.

D'ailleurs, comme on a

$$\Sigma ab = \frac{1}{2}[\Sigma(a+b)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma b^2],$$

$$\Sigma ac = \frac{1}{2}[\Sigma(a+c)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma c^2],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on voit qu'on pourra déterminer tous les coefficients (5) au moyen des sommes des carrés Σa^2, et des sommes des carrés $\Sigma(a+b)^2$ des coefficients sommés deux à deux. Puis, au moyen d'une Table des carrés, on trouvera facilement les coefficients avec de simples additions ou soustractions. A cet effet, nous avons donné, à la fin de l'Ouvrage, une Table qui fournit les carrés des nombres depuis 0,001 jusqu'à 11,999, tirée d'un travail de Schweiger, et que nous avons étendue de 10 à 12, laquelle, dans les limites des observations communes et en préparant convenablement les équations, suffira dans la plupart des cas.

31. Exemple I. — *Détermination de la valeur en secondes d'une division d'un niveau à bulle d'air.*

Plaçons sur une lunette d'un cercle méridien ou d'un

Digitized by Google

théodolite un niveau, et donnons à la lunette diverses inclinaisons, qu'on lira sur le cercle. A ces inclinaisons correspondront autant de courses de la bulle d'air, et par suite autant de lectures de divisions relatives à la position de son centre.

On peut représenter chaque inclinaison (λ) de la lunette, lue sur le cercle, par une inclinaison initiale x du niveau et par le nombre des divisions (n) parcourues par le centre de la bulle réduite en secondes, en supposant connue la valeur angulaire φ de chaque division.

En faisant diverses expériences, on pourra obtenir les valeurs de x et de y. Voici par exemple un tableau :

LECTURE au cercle.	BULLE DU NIVEAU.		POSITION du centre de la bulle.	DIFFÉRENCES entre les lectures du cercle.
	Extrémité droite.	Extrémité gauche.		
21,645	— 23,8	+ 7,4	— 8,20	0,000
21,974	— 20,2	+ 10,9	— 4,65	0,329
22,328	— 15,2	+ 15,3	— 0,25	0,683
22,676	— 12,3	+ 18,8	+ 0,25	1,031
23,110	— 7,5	+ 23,6	+ 8,00	1,465

On aura donc

$$0,000 = x - 8,209,$$
$$0,329 = x - 4,659,$$
$$0,683 = x - 0,259,$$
$$1,031 = x - 3,259,$$
$$1,465 = x - 8,009;$$

et les équations normales seront

$$5x - 1,859 = + 3,508,$$
$$- 485x + 163,48759 = + 13,702;$$

Digitized by Google

d'où l'on déduit

$$x = 0,73470, \quad y = 0,090097.$$

Par conséquent, pour n'importe quelle position du cercle, l'inclinaison du niveau sera fournie par la simple lecture n des divisions, moyennant la formule

$$\lambda = 0'',73470 + 0'',0900097\, n.$$

32. Exemple II. — *Détermination de la différence de longitude entre deux lieux.*

A cet effet, on emploie quelquefois des chronomètres que l'on transporte d'un lieu à l'autre en les échangeant. Il est évident que la différence de marche des chronomètres bien constatée indiquera la différence cherchée de longitude. Sans entrer à cet égard dans des détails minutieux, nous donnerons les équations de condition auxquelles a conduit la détermination de la distance en longitude des Observatoires de Pulkowa et de Dorpat, à savoir:

$$\begin{aligned}
+ 0,508x - y - 0,096z &= + 0'',096,\\
+ 0,544x + y - 0,312z &= - 0'',386,\\
+ 0,540x - y + 0,294z &= - 0,049,\\
+ 0,522x + y - 0,193z &= - 0,386,\\
+ 0,521x - y - 0,195z &= - 0,078,\\
+ 0,510x + y + 0,114z &= + 0,179,\\
+ 0,571x - y + 0,032z &= - 0,343,\\
+ 0,579x + y - 0,079z &= - 0,006,\\
+ 0,511x - y - 0,356z &= - 0,348,\\
+ 0,535x + y + 0,345z &= + 0,508,
\end{aligned}$$

d'où, avec la méthode des moindres carrés et en se servant des Tables jointes à l'Ouvrage, on déduira facilement les équations normales

$$\begin{aligned}
+ 2,860x + 0,038y - 0,229z &= - 0,444,\\
+ 0,038x + 10,000y + 0,196z &= + 0,630,\\
- 0,229x + 0,196y + 0,534z &= + 0,496,
\end{aligned}$$

Digitized by Google

par lesquelles on trouvera

$$x = -0,036,$$
$$y = +0,046,$$
$$z = +0,874.$$

33. Il nous reste à voir maintenant comment on calculera l'erreur moyenne dont peuvent être affectées les valeurs de x, y, z, ainsi déterminées par la méthode des moindres carrés. Sans reproduire ici la démonstration donnée par Gauss (*), ce qui nous entraînerait trop loin de notre but, nous poserons avec lui la formule

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{p-i}},$$

qui donnera l'erreur moyenne commise sur les p équations, en appelant δ les écarts de o des équations (1) après y avoir substitué les valeurs de x, y, z fournies par les équations résolvantes (5).

(*) On peut se rendre compte, à notre avis très-facilement, de cette formule sans passer par la démonstration de Gauss, en remarquant en définitive que les équations résolvantes (4), (5) ne sont que les équations (1) multipliées successivement par les systèmes des coefficients

$$a,\ a',\ a''\ ;\quad b,\ b',\ b''\ ;\quad c,\ c',\ c''\ ;\ \ldots$$

et sommées ensemble. Donc, dans le cas général, ces i équations résolvantes remplacent i des équations données p, et on pourrait considérer le système donné des équations (1) comme composé des i équations résolvantes et de $p - i$ équations prises, comme on voudra, parmi les p équations. Si l'on prend donc, comme nous avons dit au n° 27, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ dans les i équations résolvantes pour les substituer dans les autres, les écarts ne se trouveront que dans les $p - i$ équations. Ces écarts étant donc au nombre de $p - i$, il est évident que c'est bien par $p - i$ qu'il faut diviser les sommes des carrés des erreurs. D'ailleurs, même en opérant de la sorte, la somme Σd^2 ne peut pas varier, car autrement elle ne serait pas un minimum.

C'est par un semblable raisonnement qu'on pourrait, par intuition, justifier la formule (10), § III; car l'équation $\mu = \frac{\Sigma o}{n}$ peut remplacer une des équations données, et alors les vrais écarts se réduisent à $n - 1$.

Digitized by Google

Cela posé, en nous bornant au cas de $i = 3$, les erreurs à craindre sur les valeurs des inconnues x, y, z, que nous appellerons m_x, m_y, m_z, ..., seront

$$m_x^2 = \mathrm{A}m, \quad m_y^2 = \mathrm{B}m, \quad m_z^2 = \mathrm{C}m,$$

en appelant A, B, C les valeurs qu'acquièrent x, y, z lorsqu'on remplace successivement le système (5) par les suivants

$$\begin{aligned}
\Sigma a^2 x + \Sigma aby + \Sigma acz &= 1,\\
\Sigma abx + \Sigma b^2 y + \Sigma bcz &= 0,\\
\Sigma acx + \Sigma bcy + \Sigma c^2 z &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma a^2 x + \Sigma aby + \Sigma acz &= 0,\\
\Sigma abx + \Sigma b^2 y + \Sigma bcz &= 1,\\
\Sigma acx + \Sigma bcy + \Sigma c^2 z &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma a^2 x + \Sigma aby + \Sigma acz &= 0,\\
\Sigma abx + \Sigma b^2 y + \Sigma bcz &= 0,\\
\Sigma acx + \Sigma bcy + \Sigma c^2 z &= 1.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, pour ceux qui sont au courant de la théorie des déterminants, les valeurs de A, B, C seront fournies par les équations

$$\Delta.\mathrm{A} = \frac{d.\Delta}{d\Sigma a^2}, \quad \Delta.\mathrm{B} = \frac{d.\Delta}{d\Sigma b^2}, \quad \Delta.\mathrm{C} = \frac{d.\Delta}{d\Sigma c^2},$$

Δ étant le déterminant (6).

Le cas général n'offrira plus de difficulté.

VII.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS POUR DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

34. Lorsque les équations de condition ne sont plus linéaires, mais d'une forme quelconque, on peut encore appliquer la méthode exposée, pourvu que l'on connaisse

Digitized by Google

un premier système de valeurs qui satisfassent approximativement aux équations; alors on pourra déterminer les différences entre ces valeurs et les plus plausibles, ce qui conduira également au but.

Soient, par exemple, diverses équations à trois inconnues,

$$(1)\qquad \begin{cases} F\ (x, y, z, a, b, \ldots) = 0, \\ F'\ (x, y, z, a', b', \ldots) = 0, \\ F''\ (x, y, z, a'', b'', \ldots) = 0, \\ F'''\ (x, y, z, a''', b''', \ldots) = 0, \end{cases}$$

où x, y, z sont les inconnues, et a, b, a', b', a'', b'', ... les quantités constantes assignées par les observations. Soient x_1, y_1, z_1 les valeurs de x, y, z, qui satisfont déjà avec une certaine approximation aux équations données. Les valeurs les plus plausibles, c'est-à-dire celles qui rendront minimum la somme des carrés des erreurs, pourront être représentées ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_1 + \delta x_1, \\ y = y_1 + \delta y_1, \\ z = z_1 + \delta z_1. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans (1), développant par la série de Taylor selon les puissances ascendantes de δx, δy, δz, et négligeant les puissances supérieures à la première, puisque les valeurs des δ sont très-petites, il viendra

$$F_1 + \frac{dF_1}{dx}\delta x_1 + \frac{dF_1}{dy}\delta y_1 + \frac{dF_1}{dz}\delta z_1 = 0,$$

$$F'_1 + \frac{dF'_1}{dx}\delta x_1 + \frac{dF'_1}{dy}\delta y_1 + \frac{dF'_1}{dz}\delta z_1 = 0,$$

$$F''_1 + \frac{dF''_1}{dx}\delta x_1 + \frac{dF''_1}{dy}\delta y_1 + \frac{dF''_1}{dz}\delta z_1 = 0,$$

où en général $F_1^{(n)}$ indique le résultat de la substitution de x_1, y_1, z_1, dans l'équation $F^{(n)}$.

Digitized by Google

35. Exemple. — La balistique nous apprend qu'en appelant

h la hauteur due à la vitesse initiale,

l la portée,

λ la profondeur à laquelle est tombé le projectile au-dessous de l'horizontale passant par l'origine de la trajectoire et tangente à la courbe,

c un coefficient relatif à la résistance de l'air,

on a

$$8c^2h\lambda = e^{2cl} - 2cl - 1.$$

Supposons qu'on veuille, avec une série de tirs dans lesquels on emploiera toujours des charges égales et des projectiles de même poids et de même forme, déterminer les valeurs de c et h. Si on appelle c_1, h_1 les valeurs approchées de c et de h, les équations linéaires que l'on cherche seront de la forme

$$\frac{1}{h_1}(e^{2c_1l} - 2c_1l - 1)\,\delta h_1 - \left[2le^{2c_1l} - 2l - \frac{2}{c_1}\left(e^{2c_1l} - 2c_1l - 1\right)\right]\delta c_1 + 8c_1^2h_1\lambda - (e^{2c_1l} - 2c_1l - 1) = 0,$$

et il y en aura autant qu'on aura fait de tirs. En les traitant par la méthode des moindres carrés, on déterminera les inconnues δc_1 et δh_1, et on aura enfin pour les valeurs de c et de h les plus satisfaisantes

$$c = c_1 + \delta c_1, \quad h = h_1 + \delta h_1.$$

VIII.

PROBABILITÉ TYPIQUE DES ERREURS.

36. Nous ferons précéder cette étude de trois lemmes.

1° La probabilité C d'un événement est le rapport du nombre F des événements favorables à celui P des événements possibles;

$$C = \frac{F}{P}.$$

Digitized by Google

Exemple. — *Il y a dans une urne* 20 *boules blanches et noires, dont* 5 *noires. Quelle est la probabilité d'extraire une boule blanche?*

Cette probabilité sera

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

2° Lorsqu'un événement T dépend du concours de deux ou de plusieurs événements, A_1, B_1, C_1,..., la probabilité τ de T est égale au produit des probabilités α, β, γ des événements partiels; c'est-à-dire que l'on a

$$\tau = \alpha.\beta.\gamma....$$

Exemple. — *Quelle est la probabilité d'extraire de la même urne une blanche et une noire?*

La probabilité de la blanche est, comme nous avons vu, $\frac{15}{20}$; mais après l'avoir extraite, comme il n'en reste plus que 19, la probabilité de la noire est $\frac{5}{19}$. Partant, la probabilité τ cherchée sera

$$\frac{15}{20}.\frac{5}{19} = \frac{15}{76}, \text{ environ } \frac{1}{5}.$$

3° Supposons qu'on laisse tomber $2m$ fois une pièce de monnaie. La probabilité de faire un certain nombre de fois croix ou tête varie évidemment avec ce nombre, et elle est égale à la probabilité de faire, en lançant ensemble $2m$ monnaies, $m \pm l$ fois croix ou tête, l désignant un nombre entier quelconque $< m$. Soient P_m, P_{m+l} les probabilités de faire m ou $m + l$ fois croix, on aura (*)

$$P_{m+l} = P_m e^{-\frac{l^2}{m}}.$$

(*) Nous donnons cette formule ainsi que les lemmes comme connus, car leur démonstration nous entraînerait trop loin du cadre où nous nous sommes restreints. On en trouvera d'ailleurs les démonstrations dans les divers *Traités de Probabilités* indiqués à la fin de l'Ouvrage.

Digitized by Google

Il est évident que $P_{m-l} = P_{m+l}$, car l'événement $m+l$ croix correspond à l'événement associé $m-l$ têtes sur une jetée de $m+l+m-l = 2m$ monnaies.

37. Appelons maintenant $\varphi(x)$ la probabilité d'une erreur dans une série d'observations également bonnes. La probabilité étant égale alors pour des erreurs soit positives, soit négatives, cette fonction sera paire. De plus, eu égard au troisième caractère des erreurs fortuites, elle devra s'annuler par $x = \infty$, et prendre une valeur constante pour $x = 0$.

Plusieurs fonctions pourraient déjà satisfaire à ces conditions; mais, pour se faire d'abord une idée de cette fonction, nous pourrons invoquer le deuxième lemme.

Les chances ou erreurs que nous venons d'examiner sont analogues à celles qui se présentent dans le tir à la cible.

Cela étant, soit $\varphi(x^2)$, puisque la fonction est paire, la probabilité d'atteindre la cible à une distance horizontale x du centre, $\varphi(y^2)$ celle de l'atteindre à une distance verticale y du centre, et enfin $\varphi(r^2)$ celle de l'atteindre à une distance radiale r. Comme le point placé à l'extrémité du rayon r est précisément situé à des distances x et y dans les deux sens horizontal et vertical, on peut considérer l'événement (r) comme composé des deux événements (x) et (y). Par suite, selon le deuxième lemme, la fonction devra satisfaire à l'équation

$$\varphi(x^2)\,\varphi(y^2) = \varphi(r^2),$$

sous la condition

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

On trouve facilement que la fonction propre à satisfaire simultanément aux deux conditions

$$\psi(m).\psi(n) = \psi(p), \quad p = m+n,$$

est

$$\psi = a^{\pm bm},$$

a, b étant deux constantes.

Digitized by Google

On a, en effet,

$$a^{\pm bm}a^{\pm bn} = a^{\pm b(m+n)} = a^{\pm bp}.$$

La forme de notre fonction, puisque l'on doit rejeter le signe + en vertu du deuxième lemme, sera donc

$$\varphi(x^2) = a^{-bn^2},$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\varphi(x) = Ce^{-h^2x^2},$$

C et h étant deux constantes.

38. Mais, en ayant recours au troisième lemme, on peut aussi et avec plus de rigueur étudier la nature de cette fonction. En effet, l'erreur que nous considérons étant par sa nature entièrement fortuite, peut être supposée provenir de l'influence de plusieurs causes inconnues superposées, dont chacune agirait dans un sens ou dans un autre pour produire l'effet $\pm \Delta x$ sur le résultat. Car si l'une quelconque de ces causes prévalait, elle tendrait à accroître dans un certain sens l'erreur, qui aurait par conséquent, contrairement à l'hypothèse, une partie constante. L'apparition d'une erreur peut donc être comparée à la jetée de $2m$ monnaies (m étant un nombre entier arbitraire) lesquelles porteraient d'un côté $+\Delta x$ pour croix, de l'autre $-\Delta x$ pour tête. Si dans la jetée il se présente autant de croix que de têtes, les choses se compenseront et l'erreur sera nulle; s'il vient seulement croix ou tête, l'erreur sera $\pm 2m\Delta x$. En général, s'il sort $(m+l)$ croix, l'erreur sera

$$(m+l)\Delta x - (m-l)\Delta x = 2l\Delta x.$$

La probabilité de l'événement $(m+l)$ croix est, d'après le troisième lemme,

$$P_{m+l} = P_m e^{-\frac{l^2}{m}}.$$

Posons

$$x = 2l\Delta x, \quad P_{m+l} = P_x, \quad P_m = C,$$

Digitized by Google

il viendra

$$P_x = Ce^{-\frac{x^2}{hm\Delta^2 x}}.$$

Mais $hm\Delta x$ représente une quantité aussi grande que l'on veut, puisque m, pour la fortuité des erreurs, doit être supposé très-grand. Cette quantité, multipliée par la quantité infiniment petite Δx, donnera un produit fini, que nous représenterons par $\frac{1}{h^2}$. On aura donc

$$P_x = Ce^{-h^2x^2},$$

et, en remplaçant P_x par $\varphi(x)$, on aura comme précédemment

$$\varphi(x) = Ce^{-h^2x^2},$$

où C est une constante qu'on déterminera tout à l'heure.

Voici, en attendant, quelques valeurs de la fonction

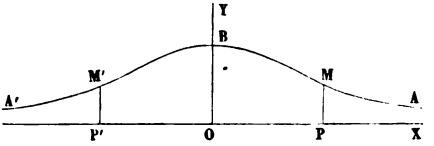
$$\varphi(x) = y = e^{-h^2x^2},$$

pour le cas de $h = 1$,

$x = 0$	0,30	0,50	1,00	2,00
$y = 1$	0,91	0,78	0,77	0,02

et la courbe représentée par l'équation $y = e^{-h^2x^2}$ sera celle de la *fig.* 4, asymptotique, comme l'on voit, de l'axe des abscisses.

Fig. 4.



Comme on pouvait s'y attendre, les probabilités de commettre des erreurs représentées par les ordonnées de cette courbe sont d'autant plus grandes que l'erreur est plus petite, et elles décroissent rapidement à mesure que l'erreur augmente.

Digitized by Google

39. Nous pouvons encore retrouver l'expression de $\varphi(x)$ en suivant une voie tout à fait différente, ce qui confirmera ce que nous venons de dire. Soient o, o', o'',... les valeurs fournies par l'observation d'une inconnue x, qui sera, par exemple, la longueur d'une base, le poids d'un gaz, etc. On aura les équations, que nous supposons en nombre n,

$$x = o, \quad x = o', \quad x = o'', \ldots.$$

Il s'agit de déduire de ces observations le valeur la plus probable de x, c'est-à-dire une valeur qui se rapproche le plus de la vérité. Remarquons, à ce sujet, que si la valeur exacte de x nous était connue d'avance, on aurait la certitude d'avoir commis dans les observations les erreurs

$$(1) \qquad x - o, \quad x - o', \quad x - o'', \ldots.$$

Maintenant, si $\varphi(\varepsilon)$ exprime la probabilité de commettre dans une observation l'erreur ε, la probabilité de faire dans les n observations susdites un système d'erreurs tel que le septième (1) serait, en vertu du deuxième lemme,

$$P = \varphi(x - o)\,\varphi(x - o')\,\varphi(x - o'')\ldots;$$

et comme plus x tend vers sa valeur exacte, plus on acquiert la certitude qu'on a fait les erreurs ci-dessus indiquées, il faudra que la fonction P, par laquelle on exprime la possibilité de faire ces erreurs, devienne d'autant plus grande que x se rapproche plus de cette vraie valeur. Donc la vraie valeur de x sera celle par laquelle la fonction P devient un maximum.

Il faudra donc que, en posant

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = \psi'\varepsilon,$$

on ait, d'après des principes connus,

$$(2) \quad \psi'(x - o) + \psi'(x - o') + \psi'(x - o'') + \ldots = 0.$$

Digitized by Google

Cela est parfaitement permis. Si, avant de faire les observations, on demandait la probabilité de commettre les erreurs $x-o$, $x-o'$, $x-o''$,..., cette probabilité serait P, et elle serait déterminée, puisque les erreurs nous seraient connues. Mais, après les observations, les erreurs faites ne nous sont pas connues, et, parmi tous les systèmes d'erreurs possibles et de probabilités relatives auxquelles donnera lieu l'adoption d'une valeur pour x, il faudra prendre celui pour lequel la probabilité de les avoir commises sera la plus grande possible; alors le système correspondant d'erreurs sera celui qui le plus probablement sera arrivé, et par conséquent la valeur relative de x sera la plus probable, c'est-à-dire la plus voisine de celle pour laquelle les erreurs supposées auraient été certainement commises.

40. Pour déterminer la fonction ψ, nous admettrons que la valeur la plus plausible de x soit donnée par la moyenne des valeurs (o)

$$x = \frac{o + o' + o'' + \ldots}{n}, \tag{3}$$

comme nous l'avons déjà vu au § III. Supposons maintenant, ce qui nous est permis,

$$o' = o'' = o''' = \ldots = o + n\alpha,$$

nous aurons, d'après l'équation (3),

$$x = \frac{o + (n-1)(o + n\alpha)}{n} = o + (n-1)\alpha,$$

et l'équation (2) deviendra

$$\psi'[(n-1)\alpha] + (n-1)\psi'(-\alpha) = 0,$$

ou

$$\frac{\psi'[(n-1)\alpha]}{(n-1)\alpha} = \frac{\psi'(-\alpha)}{-\alpha}.$$

Digitized by Google

Cela ayant lieu pour toute valeur de n, il s'ensuit que $\frac{\psi'(x)}{x}$ est une constante. En la désignant par k, on aura

$$\psi(x) = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \frac{kx^2}{2},$$

d'où

$$\varphi(x) = \lambda e^{\frac{k}{2}x^2},$$

λ étant une autre constante.

La constante k, d'après ce que nous avons remarqué, doit être négative, afin que $\varphi(x)$ devienne un maximum pour $x = o$. Nous poserons donc

$$\frac{k}{2} = -h^2.$$

Pour déterminer l'autre constante, nous observerons qu'on doit avoir (puisque l'on a la certitude de faire une erreur),

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = 1,$$

ou

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{h};$$

par suite

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

et enfin

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

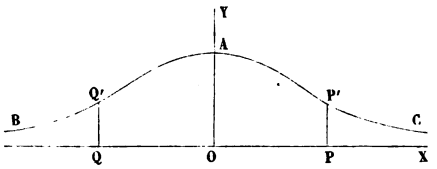
ce qui déterminera la constante C.

41. Jusqu'à présent nous avons vu quelle est la probabilité $\varphi(x)$ de commettre une erreur $\alpha = \mathrm{OP}$ (*fig.* 5). Mais on pourrait se proposer encore de savoir quelle est la probabilité de faire une erreur comprise entre $\mathrm{OQ} = -\beta$ et

Digitized by Google

$OP = \alpha$, recherche qui se présente souvent dans la pratique des observations. A cet effet, remarquons que, si l'on appelle

Fig. 5.



$\varphi(x)$ la probabilité de commettre une erreur x, celle de commettre une erreur $x + dx$, c'est-à-dire $\varphi(x + dx)$, sera

$\varphi(x)$ + la possibilité de commettre une erreur comprise entre x et $x + dx$;

par conséquent celle-ci sera

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \varphi'(x)\,dx = Ce^{-h^2x^2}dx.$$

Or, d'après le premier lemme, la probabilité de faire une erreur comprise entre x et $x + dx$ est égale à la possibilité divisée par la somme de toutes les possibilités de toutes les erreurs que l'on peut commettre entre leurs limites extrêmes, que nous supposerons être actuellement $OP = \alpha$, $OP = \beta$. Cette probabilité sera donc

$$P = \frac{Ce^{-h^2x^2}dx}{C\int_{-\beta}^{\alpha} e^{-h^2x^2}dx}.$$

Remarquons maintenant que l'intégrale $\int_{-\beta}^{\alpha} e^{-h^2x}dx^2$ exprime l'aire QQ'P'P, et que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{h}\sqrt{\pi}$$

dénote l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des

Digitized by Google

abscisses, aire qui est finie. Ces deux aires, par la nature même de la courbe, diffèrent peu entre elles, et on peut substituer l'une à l'autre; cela avec d'autant plus de raison, qu'au delà de certaines limites on peut admettre comme très-improbables les erreurs très-grandes. Par conséquent, au delà des points Q et P, les ordonnées seront très-petites, et l'aire correspondante aussi. Donc, sans crainte d'erreur dans les cas pratiques, on peut écrire, au lieu de l'expression de P, la suivante :

$$P = \frac{Ce^{-h^2x^2}\,dx}{C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Ainsi, la probabilité de faire une erreur comprise entre $-x$ et $+x$ sera

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Si l'on fait $x = \infty$, on aura $P = 1$, ce qui est évident; car alors on acquiert la certitude de commettre une erreur. L'intégrale susdite, en posant, avec Gauss, $lx = t$, prend la forme suivante :

$$\int e^{-t^2}\,dx.$$

42. Cette intégrale est trop importante dans la théorie actuelle comme dans d'autres, pour que nous ne traitions pas son développement en série. On a, en premier lieu, en développant e^{-t^2} en série,

$$\theta(t) = \int_0^t e^{-t^2}dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{t^7}{7} + \cdots;$$

en second lieu, si l'on intégre par parties, on trouve

$$e^{-t^2}dt = te^{-t^2} + 2\int t^2e^{-t^2}dt = te^{-t^2} + \frac{2}{3}t^3e^{-t^2} + \frac{2^2}{3}\int t^4e^{-t^2}dt,$$

Digitized by Google

et, en procédant de cette manière, il viendra

$$\Theta(t) = te^{-t^2}\left[1 + \frac{2t^2}{3} + \frac{(2t^2)^2}{3.5} + \frac{(2t^2)^3}{3.5.7} + \ldots\right].$$

Ces deux séries sont convergentes pour toute valeur de t; mais elles ne sont d'un usage commode que pour de petites valeurs de t.

Pour des grandes valeurs de t, il est préférable de développer par parties, comme il suit,

$$\int e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2t} e^{-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2t} e^{-t^2} + \frac{1}{2^2 t^3} e^{-t^2} + \frac{1.3}{2^2}\int \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt;$$

mais en remarquant que

$$\Theta(t) = \int_0^t e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_t^\infty e^{-t^2} dt$$

et en prenant la dernière série entre les limites t et ∞, il viendra

$$\Theta(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2t^2)^n} \mp \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} dt\right].$$

La somme d'un nombre quelconque de ces termes est alternativement plus grande et plus petite que la valeur de l'intégrale. Néanmoins, en arrêtant la série à un terme quelconque, la somme de tous les autres est moindre que ce terme (*). Ainsi la série est bien convergente et peut

(*) En effet, cette somme sera représentée par

$$\pm \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_t^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}} e^{-t^2};$$

Digitized by Google

servir à calculer la valeur de $\Theta(t)$ dans le cas en question.

On trouvera dans la Table II, à la fin de l'Ouvrage, les valeurs de $\Theta(t)$ pour chaque valeur de t.

IX.

ERREUR A CRAINDRE ET MESURES DE PRÉCISION.

Soient

$$x,\ x',\ x'',\ldots$$

plusieurs erreurs qu'on a pu commettre dans une série d'observations, et soient

$$\varphi(x),\ \varphi(x'),\ \varphi(x''),\ldots$$

leurs probabilités respectives.

Il est naturel de chercher quelle est l'erreur dans laquelle on a pu tomber le plus facilement. La première idée qui se présente à cet égard serait de prendre la moyenne des erreurs, qui serait exprimée par l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx.$$

En effet, $\varphi(x)$ désigne une fraction dont le numérateur représente le nombre des erreurs qui tombent entre x et

---

mais la plus grande valeur de e^{-t^2} entre t et $-\infty$ est e^{-t^2}; donc on a toujours

$$\int_t^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}}\,e^{-t^2} < e^{-t^2}\int_t^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}} = \frac{e^{-t^2}}{(2n+1)\,t^{2n+2}};$$

donc cette somme est toujours plus petite que

$$\pm\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\,\frac{e^{-t^2}}{t^{2n+1}},$$

qui n'est pas autre chose que le dernier terme de la série, auquel on s'est arrêté, lorsqu'on a exécuté le produit $\frac{e^{-t^2}}{\tau}$ indiqué dans le second membre (3).

Digitized by Google

$x + dx$, et le dénominateur le nombre total des erreurs qui se sont commises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Nous nous rappellerons qu'on a substitué les limites $\pm\infty$ aux limites finies; car les probabilités en dehors de ces limites sont très-petites, et leur présence ou omission ne nuit en rien à l'exactitude pratique des résultats. Par conséquent, toute la somme $x\varphi(x)\,dx$ est équivalente à une fraction dont le numérateur et le dénominateur expriment respectivement la somme des erreurs et leur nombre. Ainsi cette intégrale représente bien la moyenne cherchée.

Mais cela suppose qu'on a toujours pris les erreurs absolument entre les limites $\mp\infty$, car autrement les termes se détermineraient deux à deux réciproquement par la propriété connue

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Ainsi cette somme, que nous appellerons μ, est équivalente à

$$\mu = 2\int_0^{\infty} x\varphi(x)\,dx.$$

43. Mais, pour éviter une telle restriction et faciliter les calculs, nous emprunterons à l'analyse elle-même le moyen de tenir compte de la valeur absolue des erreurs, en considérant, d'après Gauss, les carrés des erreurs. Ainsi le carré de l'erreur à craindre, que nous appellerons m^2, sera exprimé par l'intégrale

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx,$$

qui, par la raison exposée ci-dessus, représente la moyenne des carrés des erreurs. Il est évident qu'on pourra considérer l'observation comme d'autant meilleure que cette moyenne sera plus petite; car la bonté d'une observation ne consiste pas dans le sens selon lequel l'erreur s'écarte de o, mais bien dans sa valeur absolue.

Il est bon maintenant de se faire une idée de la manière

Digitized by Google

dont varie l'erreur à craindre, selon les diverses lois de probabilités que l'on adopte.

Et d'abord, si l'on considère la probabilité typique des erreurs et que l'on pose

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

on aura

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx$$

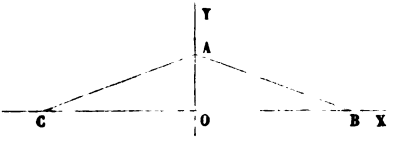
$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} D_h \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx \right) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} D_h \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2h} \right) = \frac{1}{2h^2},$$

d'où

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

44. Si, au contraire, la courbe des probabilités des erreurs se réduit aux deux lignes AB, AC (*fig.* 6), et si les

Fig. 6.



erreurs sont comprises entre OC $= -a$ et OB $= +a$, on aura

$$\varphi(x) = \frac{a - x}{a^2}.$$

En effet, l'ordonnée y correspondante à l'erreur x sera

$$y = b \frac{a - x}{a}.$$

Mais l'aire BAC $= ab$; par conséquent

$$\varphi(x) = \frac{\text{possibilité de } x}{\Sigma \text{ possibilités}} = \frac{y}{\text{BAC}} = \frac{a - x}{a^2}.$$

Digitized by Google

En convenant de prendre toujours x positivement entre O et A et entre A et O, il viendra

$$m^2 = \frac{1}{a^2}\int_0^a x^2(a-x)\,dx + \frac{1}{a^2}\int_{-a}^0 x^2(a+x)\,dx = \frac{2a^2}{12} = \frac{a^2}{6},$$

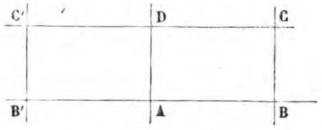
d'où

$$m = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Ainsi dans ce cas l'erreur à craindre est proportionnelle à la base du triangle (ce qui est évident) et égale environ à $\frac{1}{5}$.

45. Lorsque les erreurs, au lieu de décroître comme dans la *fig.* 5, sont toutes également probables (*fig.* 7),

Fig. 7.



on trouverait, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a},$$

et par suite

$$m^2 = \int_{-a}^{+a} x^2 \frac{dx}{2a} = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^2}{3},$$

$$m = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

L'erreur à craindre dans ce cas est plus grande que dans le cas précédent, ce qui doit être évidemment.

46. Supposons encore que la courbe des probabilités soit un arc de parabole (*fig.* 8).

En posant $OA = a$, $OC = b$, il viendra

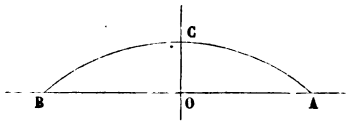
$$x^2 = \frac{a^2}{b}(b-y),$$

Digitized by Google

et puisque l'aire BCA $= \frac{h}{3} ab$, d'après un théorème connu, nous aurons

$$\varphi(x) = \frac{3}{h}\frac{y}{ab} = \frac{3}{h^a}\frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{3}{4}\frac{a^2 - x^2}{a^3}.$$

Fig. 8.



Par conséquent

$$m^2 = \frac{6}{4}\int_0^{+a} \frac{a^2 - x^2}{a^3} x^2 dx = \frac{a^2}{5},$$

$$m = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Si l'on avait cherché la moyenne arithmétique avec la formule

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\, dx,$$

on aurait trouvé, selon la probabilité typique des erreurs,

$$\mu = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-h^2x^2} dx = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} d(e^{-z^2}) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

47. En suivant la même marche pour les autres lois de probabilités et en comparant les résultats, on formerait le tableau suivant, par lequel on voit que le rapport de la moyenne des carrés des erreurs à la moyenne arithmétique est le plus grand possible lorsqu'on adopte la probabilité typique des erreurs.

Digitized by Google

$\varphi(x)$	m	μ	$\left(\frac{m}{\mu}\right)^2$
$\frac{1}{2a}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{4}{3} = 1{,}33$
$\frac{3}{4}\frac{a^2 - x^2}{a^3}$	$\frac{a}{\sqrt{5}}$	$\frac{3a}{8}$	$\frac{64}{45} = 1{,}42$
$\frac{a - x}{a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{9}{6} = 1{,}50$
$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$	$\frac{1}{h\sqrt{2}}$	$\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$	$\frac{\pi}{2} = 1{,}57$

En examinant l'expression (3), on voit que la probabilité de commettre une erreur x est d'autant plus petite que h est plus grand. Par suite h est proportionnel à la précision des observations et peut leur servir de mesure. On appelle par cette raison h la *mesure de précision* des observations.

48. On peut encore mieux expliquer de la manière suivante l'opportunité de cette dénomination.

Supposons que pour un premier système d'observations on ait

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2} d(hx),$$

et pour un autre

$$P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{-x'}^{+x'} e^{-h'^2x'^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h'^2x'^2} d(h'x);$$

ces deux intégrales P, P′ sont fonction de hx, partant elles seront égales si

$$hx = h'x';$$

d'où

$$\frac{h}{h'} = \frac{x'}{x}.$$

Digitized by Google

Par conséquent, si dans le second système d'observations on peut commettre avec une égale facilité une erreur double, triple, etc., de la première, la constante h' relative sera la moitié, le tiers, etc., de h et *vice versâ*. Mais puisqu'une observation doit être considérée comme d'autant plus précise que les erreurs dont elle est susceptible sont moindres, et comme ces erreurs décroissent en raison inverse de h, il est tout à fait convenable de prendre h pour mesure de précision des observations.

Or nous avons vu que, dans le cas de la loi typique des erreurs, on a

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

On peut donc établir ce principe que *la mesure de précision est en raison inverse de l'erreur à craindre* et *vice versâ*; principe qui relie ensemble les deux points de vue différents selon lesquels on peut envisager la question, principe d'ailleurs évident de lui-même, par la nature même des dénominations employées à l'exprimer.

Notons en passant que la quantité m que nous appelons erreur à craindre, dans le cas d'observations futures et d'une loi connue des probabilités des erreurs, est représentée par l'erreur moyenne des observations, lorsque les observations ont été déjà faites, et se calculera d'après les principes du § III.

49. Nous examinerons maintenant les relations qui existent entre le poids et la mesure de précision des observations. Si nous appelons, comme plus haut, μ la moyenne de n observations

$$x = o, \quad x = o', \quad x = o'', \ldots,$$

la probabilité d'avoir commis les erreurs

$$\mu - o, \quad \mu - o', \quad \mu - o'', \ldots$$

Digitized by Google

sera, d'après le deuxième lemme, § VIII, égale à

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2[(\mu-o)^2+(\mu-o')^2+(\mu-o'')^2+\ldots]},$$

ou bien, en remarquant que

$$\Sigma(\mu-o)^2 = n\mu^2 - 2\mu\Sigma o + \Sigma o^2 = n\left(\mu - \frac{\Sigma o}{n}\right)^2 + \frac{(\Sigma o)^2}{n},$$

et que $\mu = \frac{\Sigma o}{n}$,

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\left[\Sigma o^2 - \frac{(\Sigma o)^2}{n}\right]}.$$

Pour juger de la précision du résultat, il faut voir quelle probabilité P_z il y a de commettre une erreur z sur la valeur moyenne μ avant de nouvelles observations.

Nous aurons le droit de croire d'autant plus à la bonté du résultat obtenu que cette probabilité sera plus petite.

Soit donc $y = \mu + z$ la vraie valeur de la quantité que l'on cherche, il viendra

$$P_z = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Sigma(\mu-o)^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Sigma(z+\mu-o)^2},$$

$$P_z = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-nh^2z^2-2h^2z\Sigma(\mu-o)h^2(\mu-o)^2},$$

à savoir

$$P_z = Pe^{-nh^2z^2}.$$

En appelant $H = h\sqrt{n}$ la mesure de précision de ce résultat, on obtient

$$P_z = Pe^{-H^2z^2};$$

ce qui démontre que, pour d'égales probabilités P de commettre les erreurs $\mu - o$, c'est-à-dire à circonstances égales, la probabilité P_z est d'autant plus petite que $h\sqrt{n}$ est plus grand, c'est-à-dire que le nombre des observations augmente davantage.

Digitized by Google

Pour un autre système d'observations, on aura

$$H' = h\sqrt{n'},$$

dont on déduit

$$n : n' :: H^2 : H'^2.$$

Mais, comme nous l'avons vu § IV, les nombres n, n' sont proportionnels aux poids p, p' des observations; donc on aura encore

$$p : p' :: H^2 : H'^2.$$

Par conséquent, *les poids des moyennes sont proportionnels aux carrés de leurs mesures de précision,* et en nous rappelant que celles-ci sont inversement proportionnelles aux erreurs à craindre, nous retomberons sur le principe connu § IV, que les poids sont inversement proportionnels aux carrés des erreurs à craindre, ce qui confirme et rattache ensemble toutes nos théories.

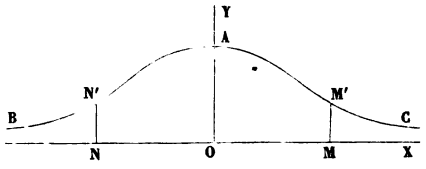
X.

DE L'ERREUR PROBABLE.

50. En général, quelle que soit la loi des erreurs, on appellera *erreur probable* l'erreur telle, qu'il y ait la même probabilité d'en commettre une plus forte ou une plus faible.

Soit ainsi BAC (*fig.* 9) la courbe des probabilités, et OM

Fig. 9.



l'erreur probable; il faudra que l'ordonnée correspondante à OM partage en deux parties égales l'aire AOX. En

Digitized by Google

effet, comme chaque aire AOMM', M'MX, exprime la probabilité que l'erreur tombe entre O et M, ou bien entre M et X, et comme ces deux probabilités doivent par hypothèse être égales, il s'ensuit que les aires le seront également.

Comme on peut en dire autant de la partie négative de la courbe, il faudra que l'aire entière NN'M'M partage par moitié l'aire entière, ou bien qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}$.

L'erreur probable, que nous appellerons r, sera donc celle pour laquelle

$$2\int_0^r \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

ou

$$\int_0^r \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Supposons que $-a$ et $+a$ étant les limites des erreurs, celles-ci soient toutes également probables; comme dans ce cas

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}a,$$

il viendra

$$\int_0^r \frac{1}{2a}\,dx = \frac{r}{2a} = \frac{1}{4};$$

d'où

$$r = \frac{a}{2}, \tag{2}$$

ce qu'on pouvait prévoir; car, naturellement, l'ordonnée qui correspond à l'erreur probable passera par la moitié de AB (*fig.* 7). En se rappelant ensuite qu'on a $m = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (p. 55), on en déduira $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,m$.

Digitized by Google

Dans le cas de la *fig.* 5, on a

$$\int_0^r \varphi(x)\,dx = \int_0^r \frac{a-x}{2a^2}\,dx = \frac{1}{4},$$

$$r = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{3}$$

d'où, en comparant r avec la valeur de $m = \frac{a}{\sqrt{6}}$, qu'on a déjà trouvée en ce cas, il vient

$$r = a\,(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}717\,m. \tag{4}$$

51. Dans le cas de la loi typique des erreurs, on a

$$\int \varphi(x)\,dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

d'après les notations adoptées au § VIII. Posons $t = \alpha$; cette intégrale, que nous avons déjà appelée $\Theta(t)$, deviendra

$$\Theta(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2}\,dt. \tag{5}$$

Rappelons-nous que $hx = t$, et qu'ainsi l'erreur x est comprise par hypothèse entre $-\frac{\alpha}{h}$ et $+\frac{\alpha}{h}$; puisque $m = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, elle sera comprise encore entre

$$\mp \alpha m \sqrt{2}. \tag{6}$$

L'erreur probable sera celle pour laquelle on a

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}, \tag{7}$$

Digitized by Google

ou bien, en désignant par ρ la valeur qui rend

$$\Theta(\alpha) = \frac{1}{2},$$

celle pour laquelle on a $x = \frac{\rho}{h}$. On trouve

$$\rho = 0,4769363.$$

Comme on a

$$r = \frac{\rho}{h},$$

il en résulte qu'il y a la probabilité $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 1 contre 1 à parier que l'erreur est comprise numériquement entre 0 et r, ou bien entre 0 et $\frac{0,477}{h}$.

Nous donnerons ici quelques valeurs de Θ qui serviront à faire mieux comprendre la marche de la fonction :

Pour $t = 0,476 = \rho$,	on a	$\Theta(t) = 0,5$;
$t = 0,595 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,6$;
$t = 0,732 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,7$;
$t = 0,906 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,7$;
$t = 1,100 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,8427005$;
$t = 1,163 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,9$;
$t = 1,821 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,19$;
$t = 2,317 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,999$;
$t = 2,751 = \rho$,		$\Theta(t) = 0,9999$;
$t = \infty \quad = \rho$,		$\Theta(t) = 1$.

On déduit de ce tableau que, pour les erreurs supérieures à

$$1, \quad 1,163, \quad 1,821, \quad 2,317,$$

la probabilité est seulement de

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}.$$

Digitized by Google

Remarquons que les deux équations $hx = t$, $hr = \rho$ donnent

$$x = \frac{t}{\rho} r,$$

et que, par les deux autres

$$hr = \rho, \quad m = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

on obtient

$$r = \rho\sqrt{2}, \quad m = 0{,}6745\, m, \tag{8}$$

où m sera l'erreur moyenne dont nous avons parlé, s'il s'agit d'observations faites, ou bien l'erreur à craindre sur des observations à faire, dont on suppose connue la probabilité des erreurs.

52. En rassemblant les valeurs déjà trouvées pour r relativement à m, il viendra pour le cas des *fig.* 4, 5, 7

$$\begin{cases} r = 0{,}866\, m, \\ r = 0{,}717\, m, \\ r = 0{,}674\, m; \end{cases} \tag{9}$$

d'où l'on voit que l'erreur probable est moindre que l'erreur à craindre, ce qui doit être. Pour s'en faire une idée nette, supposons qu'il y ait mille erreurs également possibles distribuées entre 0 et a, l'erreur probable sera évidemment $\frac{a}{2}$, tandis que l'erreur moyenne sera bien plus grande, puisque la somme des erreurs de $\frac{a}{2}$ à a est plus forte que celle des erreurs de 0 à $\frac{a}{2}$. C'est pour cela qu'on a justement appelé cette moyenne l'erreur à craindre; car si, d'un côté, les erreurs au-dessous et au-dessus de la valeur r sont également probables, de l'autre, leurs grandeurs étant différentes, elles n'ont pas la même importance

Digitized by Google

pour la précision du résultat, et l'on doit craindre plutôt, même à égale probabilité de se tromper, de faire des erreurs grandes que des petites. Cela se verra encore plus clairement si nous supposons, pour un moment, que les erreurs que l'on peut commettre pour une loi donnée de probabilité représentent autant de sommes à payer. Quoique ces sommes aient égale probabilité de sortir au-dessous et au-dessus de la somme r, il est évident que, pour s'en garantir, on devra craindre qu'il ne sorte une somme supérieure à r plutôt qu'une moindre, car au delà de r les sommes, tout en ayant égale probabilité de sortir, sont pourtant plus grandes en valeur absolue.

Remarquons enfin que, des deux équations

$$r = \frac{\rho}{h} = \frac{0,476936}{h}$$

et (§ VIII)

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

on déduit

$$(10) \qquad \begin{cases} r = 0,476936\sqrt{\pi}\,\mu, \\ r = 0,84535\,\mu. \end{cases}$$

Telle sera l'erreur probable commise sur la valeur de la moyenne arithmétique.

53. Pratiquement, au lieu des intégrales

$$\mu = 2\int_0^\infty x\varphi(x)\,dx, \quad m = 2\int_0^\infty x^2\varphi(x)\,dx,$$

on peut prendre la moyenne μ_1 des valeurs absolues des erreurs, et la moyenne m_1 des carrés des erreurs.

Soient donc n les observations, et voyons quelle différence nous trouverons à substituer μ_1 à μ.

Digitized by Google

Soit

$$\mu_1 = \frac{x + x' + x'' + \ldots}{n},$$

où x, x', x'',... sont les valeurs absolues des erreurs, et faisons

$$\mu_1 - \mu = \omega,$$

on obtiendra

$$\omega^2 = \mu_1^2 + \mu - 2\mu_1\mu,$$

$$\omega^2 = \frac{\Sigma x^2}{n^2} + \mu^2 - 2\frac{\Sigma x}{n}\mu + \frac{2\Sigma xx'}{n^2};$$

mais on a

$$m_1 = \frac{\Sigma x^2}{n};$$

et comme la moyenne des valeurs x, x', x'',... est μ, on pourra substituer à la somme $\Sigma xx'$ autant de fois $\mu_1\,\mu_1$ qu'il y a de termes, à savoir $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Ainsi, on aura approximativement

$$\omega^2 = \frac{m_1}{n} + \mu^2 - 2\mu^2 + \frac{2\mu^2 n(n-1)}{1.2.n^2},$$

ou

$$\omega^2 = \frac{m_1 - \mu_1^2}{n},$$

et

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{m_1 - \mu_1^2}{n}}.$$

On peut considérer cette expression de ω comme l'erreur à craindre sur μ, et par suite (5) l'intégrale $\Theta(\alpha)$ exprimera la probabilité que (μ) soit compris entre

$$\mu_1 - \alpha\sqrt{\frac{2(m_1 - \mu_1^2)}{n}}, \quad \mu_1 + \alpha\sqrt{\frac{2(m_1 - \mu_1^2)}{n}}.$$

Ces formules, auxquelles nous sommes arrivés bien sim-

Digitized by Google

plement, contiennent la conclusion d'un Mémoire très-important de Poisson sur le tir à la cible. Il suffira d'adopter pour μ_1 et m_1 les moyennes (en appelant, par exemple, r la distance au centre à laquelle frappent les balles) de n' expériences précédentes, de sorte que l'on ait

$$\mu_1 = \frac{\Sigma r}{n'},$$

$$m_1 = \frac{\Sigma r^2}{n'},$$

et alors l'intégrale $\Theta(\alpha)$ exprimera la probabilité que sur n' nouvelles expériences l'écart moyen du centre des coups tirés soit compris entre les limites.

54. Pour permettre d'évaluer dans la pratique la probabilité des erreurs commises, nous avons donné dans les Tables II et III les valeurs de t et de $\frac{t}{\rho}$ correspondant à l'intégrale

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt.$$

La Table II nous donne la probabilité Θ que l'erreur d'observations est comprise entre $\mp t$. Ainsi, par exemple, on trouvera que la probabilité que l'erreur soit comprise entre $\mp 0,3$ est $0,329$, à savoir : qu'il y a 329 contre 671 à parier que l'erreur sera comprise entre ces limites, ou, en d'autres termes, que sur 1000 erreurs commises, 329 tombent entre $\mp 0,3$.

La Table III nous fournit la probabilité Θ que le rapport de l'erreur d'observation à l'erreur probable soit compris entre les limites $\mp \frac{t}{\rho}$ indiquées dans les colonnes $\left(\frac{t}{\rho}\right)$. On voit, par exemple, qu'il y a $0,363$ de probabilité, à savoir : qu'on peut parier 36 contre 64 que l'er-

Digitized by Google

reur ne dépassera pas les $\frac{7}{10}$ de l'erreur probable, ou que la valeur probable a d'une observation donnée sera comprise entre $a - 0,7r$ et $a + 0,7r$.

XI.

APPLICATIONS.

55. 1° Supposons que l'on ait fait n observations d'un phénomène également bonnes : quelle est la probabilité que l'erreur commise sur la moyenne soit comprise entre les limites $\pm l$, de sorte qu'en appelant M la moyenne, la mesure du phénomène ait pour limites $M - l$, $M + l$?

Posons

$$l = \alpha m\sqrt{2};$$

d'après la formule (6) du § X, $\Theta(\alpha)$ sera la probabilité cherchée, et α aura la valeur

$$\alpha = \frac{l}{m\sqrt{2}}.$$

Or m est à peu près égal à $\frac{\sqrt{\Sigma\delta^2}}{n}$ (§ III); donc

$$\alpha = \frac{ln}{\sqrt{2\Sigma\delta^2}}. \tag{1}$$

Admettons qu'on ait fait, par exemple, avec le théodolite d'un angle compris entre deux signaux, les 25 observations consignées dans le tableau ci-contre :

Digitized by Google

ANGLE.	δ	δ^2	ANGLE.	δ	δ^2
$33^{o}.17'.29''$	— 1,8	3,24	$34^{o}.17'.30''$	— 0,8	0,64
35	+ 4,2	17,64	31	+ 0,2	0,04
32	+ 1,2	1,44	29	— 1,8	3,24
35	+ 4,2	17,64	32	+ 1,2	1,44
28	— 2,8	7,84	29	— 1,8	3,24
31	+ 0,2	0,04	33	+ 2,2	4,84
30	— 0,8	0,06	34	+ 3,2	10,24
34	+ 3,2	10,24	29	— 1,8	3,24
27	— 3,8	14,44	28	— 3,8	7,84
29	— 1,8	3,24	30	— 0,8	0,64
31	+ 0,2	0,04	32	+ 1,2	1,44
32	+ 1,2	1,44	31	+ 0,2	0,04
35	+ 4,2	17,64	Sommes. 770	.....	135,90
			Moyenne. 30,8		

Proposons-nous maintenant de savoir quelle est la probabilité que la moyenne $M = 33^{o}\,17'\,30'',8$ sera comprise entre les limites $M - 1''$, $M + 1''$; on aura, en remarquant que dans ce cas $l = 1$,

$$\alpha = \frac{1.25}{\sqrt{2.135,90}} = 1,53;$$

et ensuite, au moyen de la Table II,

$$\Theta(\alpha) = \Theta(1,53) = 0,969.$$

Il y a donc 32 contre 1 à parier que l'angle, dans une nouvelle série d'observations, sera compris entre $33^{o}\,17'\,29''$ et $33^{o}\,17'\,31'',8$.

56. 2° Le poids de chaque observation est Q : quelle est la probabilité que la moyenne de n observations soit comprise entre les limites $\pm l$ du vrai résultat?

D'après le § IV, en appelant Q le poids de chaque observation, celui de la moyenne de n observations sera nQ; et en posant, comme il est permis, dans le (9) § IV,

Digitized by Google

$L = 1$, on obtient la relation

$$\frac{n}{\sqrt{2\Sigma\delta^2}} = \sqrt{p};$$

la formule (1) devient alors

$$\alpha = l\sqrt{p};$$

et comme $p = nQ$, il viendra

$$\alpha = l\sqrt{nQ}, \tag{2}$$

et $\Theta(\alpha)$ sera la probabilité cherchée.

Soit, par exemple,

$$Q = 10, \quad n = 40, \quad l = 0{,}6,$$

on aura

$$\alpha = 0{,}06\sqrt{10.40} = 1{,}2,$$

et par la Table II on déduira $\Theta(1,2) = 0{,}910$, c'est-à-dire qu'il y aura 10 contre 1 à parier que la moyenne est comprise entre les limites données.

57. 3° Supposons que la vraie valeur d'une quantité soit V, et que les observations, au contraire, aient fourni pour moyenne une quantité $V + E$ dont les limites sont $\pm l$: quelle est la probabilité qu'il y ait dans l'instrument une erreur constante E?

Le résultat O des observations sera compris entre

$$V + E - l \quad \text{et} \quad V + E + l;$$

donc l'erreur constante E sera comprise entre

$$O - (V + l) = O - V - l \quad \text{et} \quad O - (V - l) = O = V + l,$$

avec une probabilité égale à celle que O soit comprise entre les limites $V + E \mp l$.

Exemple. — *Supposons que l'angle vrai entre deux signaux soit de* $33°17'33'',8$, *et qu'il surpasse de* $3''$ *celui fourni par la moyenne : quelle est la probabilité*

Digitized by Google

qu'il y ait dans l'instrument ou dans la manière d'observer une erreur systématique comprise entre 1″ *et* 5″?

On aura dans ce cas

$$V - O = 3'',$$

et

$$3'' - l = 1, \quad 3'' + l = 5'';$$

d'où $l = 2''$, et par conséquent

$$\alpha = \frac{2.25}{\sqrt{2.133,90}} = 2,06,$$

$$\theta(\alpha) = 0,906.$$

Il y a donc 996 contre 4, à savoir 249 contre 1 à parier qu'il y a dans l'instrument une erreur fixe de 1 à 5′; ou bien encore que la moyenne déduite de nouvelles observations sera comprise entre 33° 17′ 31″, 8 et 33° 17″ 35″, 8.

58. 4° Exemple. — *M. Dumas fit dix-neuf expériences pour déterminer l'*équivalent chimique *de l'hydrogène, en se servant de l'acide sulfurique* (S) *et de l'acide phosphorique* (F) *comme corps desséchants.*

En représentant par 100 l'équivalent de l'oxygène, les résultats des expériences seraient les suivants :

	H	δ		H	δ
S.....	12,472	— 0,043	S.....	12,522	+ 0,007
S.....	12,480	— 0,035	S.....	12,533	+ 0,018
F.....	12,480	— 0,035	S.....	12,546	+ 0,031
F.....	12,489	— 0,026	F.....	12,547	+ 0,032
S.....	12,490	— 0,025	S.....	12,550	+ 0,035
F.....	12,490	— 0,025	F.....	12,550	+ 0,035
F.....	12,490	— 0,025	S.....	12,551	+ 0,034
S.....	12,491	— 0,024	F.....	12,551	+ 0,034
S.....	12,496	— 0,019	F.....	12,562	+ 0,047
F.....	12,308	— 0,007	Moy...	12,515	

Digitized by Google

La somme des carrés des erreurs étant

$$\Sigma\delta^2 = 0,0173,$$

si l'on suppose $l = 0,015$, on aura, comme dans le premier Exemple,

$$\alpha = \frac{0,015 \times 19}{\sqrt{2 \times 0,0173}} = 1,532;$$

d'où, avec la Table II,

$$\Theta(\alpha) = \Theta(1,672) = 0,969.$$

Il y aura donc, comme conclut Cournot, 32 à parier contre 1 que l'erreur commise sur la moyenne 12,515 est comprise entre les limites $\pm 0,015$, en supposant les observations exemptes de toute erreur constante; ou bien, si l'on admet l'exactitude de la loi de Proust, d'après laquelle l'équivalent de l'hydrogène serait 12,500, il y aurait, au contraire, à parier 32 contre 1 que les résultats de M. Dumas, dont la moyenne est 12,515, sont affectés d'une cause constante d'erreur tendant à accroître les valeurs. — On voit par là de quel secours peut être ce calcul pour permettre d'apprécier à leur juste valeur les expériences dont abondent les annales de la science.

Digitized by Google

TABLE I.

CARRÉS DES NOMBRES, DEPUIS LE NOMBRE 0,000
JUSQU'AU NOMBRE 12,000, RÉDUITS A QUATRE CHIFFRES DÉCIMAUX.

Digitized by Google

Digitized by Google

N	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
00	0,0000	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500	0,3600	0,4900	0,6400	0,8100
01	0,0000	0,0102	0,0404	0,0906	0,1608	0,2510	0,3612	0,4914	0,6416	0,8118
02	0,0000	0,0104	0,0408	0,0912	0,1616	0,2520	0,3624	0,4928	0,6432	0,8136
03	0,0000	0,0106	0,0412	0,0918	0,1624	0,2530	0,3636	0,4942	0,6448	0,8154
04	0,0000	0,0108	0,0416	0,0924	0,1632	0,2540	0,3648	0,4956	0,6464	0,8172
05	0,0000	0,0110	0,0420	0,0930	0,1640	0,2550	0,3660	0,4970	0,6480	0,8190
06	0,0000	0,0112	0,0424	0,0936	0,1648	0,2560	0,3672	0,4984	0,6496	0,8208
07	0,0000	0,0114	0,0428	0,0942	0,1656	0,2570	0,3684	0,4998	0,6512	0,8226
08	0,0001	0,0117	0,0433	0,0949	0,1665	0,2581	0,3697	0,5013	0,6529	0,8245
09	0,0001	0,0119	0,0437	0,0955	0,1673	0,2591	0,3709	0,5027	0,6545	0,8263
10	0,0001	0,0121	0,0441	0,0961	0,1681	0,2601	0,3721	0,5041	0,6561	0,8281
11	0,0001	0,0123	0,0445	0,0967	0,1689	0,2611	0,3733	0,5055	0,6577	0,8299
12	0,0001	0,0125	0,0449	0,0973	0,1697	0,2621	0,3745	0,5069	0,6593	0,8317
13	0,0002	0,0128	0,0454	0,0980	0,1706	0,2632	0,3758	0,5084	0,6610	0,8336
14	0,0002	0,0130	0,0458	0,0986	0,1714	0,2642	0,3770	0,5098	0,6626	0,8354
15	0,0002	0,0132	0,0462	0,0992	0,1722	0,2652	0,3782	0,5112	0,6642	0,8372
16	0,0003	0,0135	0,0467	0,0999	0,1731	0,2663	0,3795	0,5127	0,6659	0,8391
17	0,0003	0,0137	0,0471	0,1005	0,1739	0,2673	0,3807	0,5141	0,6675	0,8409
18	0,0003	0,0139	0,0473	0,1011	0,1747	0,2683	0,3819	0,5155	0,6691	0,8427
19	0,0004	0,0142	0,0480	0,1018	0,1756	0,2694	0,3832	0,5170	0,6708	0,7446
20	0,0004	0,0144	0,0484	0,1024	0,1764	0,2704	0,3844	0,5184	0,6724	0,8464
21	0,0004	0,0146	0,0488	0,1030	0,1772	0,2714	0,3856	0,5198	0,6740	0,8482
22	0,0005	0,0149	0,0493	0,1037	0,1781	0,2725	0,3869	0,5213	0,6757	0,8501
23	0,0005	0,0151	0,0497	0,1043	0,1789	0,2735	0,3881	0,5227	0,6773	0,8519
24	0,0006	0,0154	0,0502	0,1050	0,1798	0,2746	0,3894	0,5242	0,6790	0,8538
25	0,0006	0,0156	0,0506	0,1056	0,1806	0,2756	0,3906	0,5256	0,6806	0,8556
26	0,0007	0,0159	0,0511	0,1063	0,1815	0,2767	0,3919	0,5271	0,6823	0,8575
27	0,0007	0,0161	0,0515	0,1069	0,1823	0,2777	0,3931	0,5285	0,6839	0,8593
28	0,0008	0,0164	0,0520	0,1076	0,1832	0,2788	0,3944	0,5300	0,6856	0,8612
29	0,0008	0,0166	0,0524	0,1082	0,1840	0,2798	0,3956	0,5314	0,6872	0,8630
30	0,0009	0,0169	0,0529	0,1089	0,1849	0,2809	0,3969	0,5329	0,6889	0,8649
31	0,0010	0,0172	0,0534	0,1096	0,1858	0,2820	0,3982	0,5344	0,6906	0,8668
32	0,0010	0,0174	0,0538	0,1102	0,1866	0,2830	0,3994	0,5358	0,6922	0,8686
33	0,0011	0,0177	0,0543	0,1109	0,1875	0,2841	0,4007	0,5373	0,6939	0,8705
34	0,0012	0,0180	0,0548	0,1116	0,1884	0,2852	0,4020	0,5388	0 6956	0,8724
35	0,0012	0,0182	0,0552	0,1122	0,1892	0,2862	0,4032	0,5402	0,6972	0,8742
36	0,0013	0,0185	0,0557	0,1129	0,1901	0,2873	0,4045	0,5417	0,6989	0,8761
37	0,0014	0,0188	0,0562	0,1136	0,1910	0,2884	0,4058	0,5432	0,7006	0,8780
38	0,0014	0,0190	0,0566	0,1142	0,1918	0,2894	0,4070	0,5446	0,7022	0,8798
39	0,0015	0,0193	0,0571	0,1149	0,1927	0,2905	0,4083	0,5461	0,7039	0,8817
40	0,0016	0,0196	0,0576	0,1156	0,1936	0,2916	0,4096	0,5476	0,7056	0,8836
41	0,0017	0,0199	0,0581	0,1163	0,1945	0,2927	0,4109	0,5491	0,7073	0,8853
42	0,0018	0,0202	0,0586	0,1170	0,1954	0,2938	0,4122	0,5506	0,7090	0,8874
43	0,0018	0,0204	0,0590	0,1176	0,1962	0,2948	0,4134	0,5520	0,7106	0,8892
44	0,0019	0,0207	0,0595	0,1183	0,1971	0,2959	0,4147	0,5535	0,7123	0,8911
45	0,0020	0,0210	0,0600	0,1190	0,1980	0,2970	0,4160	0,5550	0,7140	0,8930
46	0,0021	0,0213	0,0605	0,1197	0,1989	0,2981	0,4173	0,5565	0,7157	0,8949
47	0,0022	0,0216	0,0610	0,1204	0,1998	0,2992	0,4186	0,5580	0,7174	0,8968
48	0,0023	0,0219	0,0615	0,1211	0,2007	0,3003	0,4199	0,5595	0,7191	0,8987
49	0,0024	0,0222	0,0620	0,1218	0,2016	0,3014	0,4212	0,5610	0,7208	0,9006

Digitized by Google

N	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
50	0,0025	0,0225	0,0625	0,1225	0,2025	0,3025	0,4225	0,5625	0,7225	0,9025
51	0,0026	0,0228	0,0630	0,1232	0,2034	0,3036	0,4238	0,5640	0,7242	0,9044
52	0,0027	0,0231	0,0635	0,1239	0,2043	0,3047	0,4251	0,5655	0,7259	0,9063
53	0,0028	0,0234	0,0640	0,1246	0,2052	0,3058	0,4264	0,5670	0,7276	0,9082
54	0,0029	0,0237	0,0645	0,1253	0,2061	0,3069	0,4277	0,5685	0,7293	0,9101
55	0,0030	0,0240	0,0650	0,1260	0,2070	0,3080	0,4290	0,5700	0,7310	0,9120
56	0,0031	0,0243	0,0655	0,1267	0,2079	0,3091	0,4303	0,5715	0,7327	0,9139
57	0,0032	0,0246	0,0660	0,1274	0,2088	0,3102	0,4316	0,5730	0,7344	0,9158
58	0,0034	0,0250	0,0666	0,1282	0,2098	0,3114	0,4330	0,5746	0,7362	0,9178
59	0,0035	0,0253	0,0671	0,1289	0,2107	0,3125	0,4343	0,5761	0,7379	0,9197
60	0,0036	0,0256	0,0676	0,1296	0,2116	0,3136	0,4356	0,5776	0,7396	0,9216
61	0,0037	0,0259	0,0681	0,1303	0,2125	0,3147	0,4369	0,5791	0,7413	0,9235
62	0,0038	0,0262	0,0686	0,1310	0,2134	0,3158	0,4382	0,5806	0,7430	0,9254
63	0,0040	0,0266	0,0692	0,1318	0,2144	0,3170	0,4396	0,5822	0,7448	0,9274
64	0,0041	0,0269	0,0697	0,1325	0,2153	0,3181	0,4409	0,5837	0,7465	0,9293
65	0,0042	0,0272	0,0702	0,1332	0,2162	0,3192	0,4422	0,5852	0,7482	0,9312
66	0,0044	0,0276	0,0708	0,1340	0,2172	0,3204	0,4436	0,5868	0,7500	0,9332
67	0,0045	0,0279	0,0713	0,1347	0,2181	0,3215	0,4449	0,5883	0,7517	0,9351
68	0,0046	0,0282	0,0718	0,1354	0,2190	0,3226	0,4462	0,5898	0,7534	0,9370
69	0,0048	0,0286	0,0724	0,1362	0,2200	0,3238	0,4476	0,5912	0,7552	0,9390
70	0,0049	0,0289	0,0729	0,1369	0,2209	0,3249	0,4489	0,5929	0,7569	0,9409
71	0,0050	0,0292	0,0734	0,1376	0,2218	0,3260	0,4502	0,5944	0,7586	0,9428
72	0,0052	0,0296	0,0740	0,1384	0,2228	0,3272	0,4516	0,5960	0,7604	0,9448
73	0,0053	0,0299	0,0745	0,1391	0,2237	0,3283	0,4529	0,5975	0,7621	0,9467
74	0,0055	0,0303	0,0751	0,1399	0,2247	0,3295	0,4543	0,5991	0,7639	0,9487
75	0,0056	0,0306	0,0756	0,1406	0,2256	0,3306	0,4556	0,6006	0,7656	0,9506
76	0,0058	0,0310	0,0762	0,1414	0,2266	0,3318	0,4570	0,6022	0,7674	0,9526
77	0,0059	0,0313	0,0767	0,1421	0,2275	0,3329	0,4583	0,6037	0,7691	0,9545
78	0,0061	0,0317	0,0773	0,1429	0,2285	0,3341	0,4597	0,6053	0,7709	0,9565
79	0,0062	0,0320	0,0778	0,1436	0,2294	0,3352	0,4610	0,6068	0,7726	0,9584
80	0,0064	0,0324	0,0784	0,1444	0,2304	0,3364	0,4624	0,6084	0,7744	0,9604
81	0,0066	0,0328	0,0790	0,1452	0,2314	0,3376	0,4638	0,6100	0,7762	0,9624
82	0,0067	0,0331	0,0795	0,1459	0,2323	0,3387	0,4651	0,6115	0,7779	0,9643
83	0,0069	0,0335	0,0801	0,1467	0,2333	0,3399	0,4665	0,6131	0,7797	0,9663
84	0,0071	0,0339	0,0807	0,1475	0,2343	0,3411	0,4679	0,6147	0,7815	0,9683
85	0,0072	0,0342	0,0812	0,1482	0,2352	0,3422	0,4692	0,6162	0,7832	0,9702
86	0,0074	0,0346	0,0818	0,1490	0,2362	0,3434	0,4706	0,6178	0,7850	0,9722
87	0,0076	0,0350	0,0824	0,1498	0,2372	0,3446	0,4720	0,6194	0,7868	0,9742
88	0,0077	0,0353	0,0829	0,1505	0,2381	0,3457	0,4733	0,6209	0,7885	0,9761
89	0,0079	0,0357	0,0835	0,1513	0,2391	0,3469	0,4747	0,6225	0,7903	0,9781
90	0,0081	0,0361	0,0841	0,1521	0,2401	0,3481	0,4761	0,6241	0,7921	0,9801
91	0,0083	0,0365	0,0847	0,1529	0,2411	0,3493	0,4775	0,6257	0,7939	0,9821
92	0,0085	0,0369	0,0853	0,1537	0,2421	0,3505	0,4789	0,6273	0,7957	0,9841
93	0,0086	0,0372	0,0858	0,1544	0,2430	0,3516	0,4802	0,6288	0,7974	0,9860
94	0,0088	0,0376	0,0864	0,1552	0,2440	0,3528	0,4816	0,6304	0,7992	0,9880
95	0,0090	0,0380	0,0870	0,1560	0,2450	0,3540	0,4830	0,6320	0,8010	0,9900
96	0,0092	0,0384	0,0876	0,1568	0,2460	0,3552	0,4844	0,6336	0,8028	0,9920
97	0,0094	0,0388	0,0882	0,1576	0,2470	0,3564	0,4858	0,6352	0,8046	0,9940
98	0,0096	0,0392	0,0888	0,1584	0,2480	0,3576	0,4872	0,6368	0,8064	0,9960
99	0,0098	0,0396	0,0894	0,1592	0,2490	0,3588	0,4886	0,6384	0,8082	0,9980

Digitized by Google

N	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
00	1,0000	1,2100	1,4400	1,6900	1,9600	2,2500	2,5600	2,8900	3,2400	3,6100
01	1,0020	1,2122	1,4424	1,6926	1,9628	2,2530	2,5632	2,8934	3,2436	3,6138
02	1,0040	1,2144	1,4448	1,6952	1,9656	2,2560	2,5664	2,8968	3,2472	3,6176
03	1,0060	1,2166	1,4472	1,6978	1,9684	2,2590	2,5696	2,9002	3,2508	3,6214
04	1,0080	1,2188	1,4496	1,7004	1,9712	2,2620	2,5728	2,9036	3,2544	3,6252
05	1,0100	1,2210	1,4520	1,7030	1,9740	2,2650	2,5760	2,9070	3,2580	3,6290
06	1,0120	1,2232	1,4544	1,7056	1,9768	2,2680	2,5792	2,9104	3,2616	3,6328
07	1,0140	1,2254	1,4568	1,7082	1,9796	2,2710	2,5824	2,9138	3,2652	3,6366
08	1,0161	1,2277	1,4593	1,7109	1,9825	2,2741	2,5857	2,9173	3,2689	3,6405
09	1,0181	1,2299	1,4617	1,7135	1,9853	2,2771	2,5889	2,9207	3,2725	3,6443
10	1,0201	1,2321	1,4641	1,7161	1,9881	2,2801	2,5921	2,9241	3,2761	3,6481
11	1,0221	1,2343	1,4665	1,7187	1,9909	2,2831	2,5953	2,9275	3,2797	3,6519
12	1,0241	1,2365	1,4689	1,7213	1,9937	2,2861	2,5985	2,9309	3,2833	3,6557
13	1,0262	1,2388	1,4714	1,7240	1,9966	2,2892	2,6018	2,9344	3,2870	3,6596
14	1,0282	1,2410	1,4738	1,7266	1,9994	2,2922	2,6050	2,9378	3,2906	3,6634
15	1,0302	1,2432	1,4762	1,7292	2,0022	2,2952	2,6082	2,9412	3,2942	3,6672
16	1,0323	1,2455	1,4787	1,7319	2,0051	2,2983	2,6115	2,9447	3,2979	3,6711
17	1,0343	1,2477	1,4811	1,7345	2,0079	2,3013	2,6147	2,9481	3,3015	3,6749
18	1,0363	1,2499	1,4835	1,7371	2,0107	2,3043	2,6179	2,9515	3,3051	3,6787
19	1,0384	1,2522	1,4860	1,7398	2,0136	2,3074	2,6212	2,9550	3,3088	3,6826
20	1,0404	1,2544	1,4884	1,7424	2,0164	2,3104	2,6244	2,9584	3,3124	3,6864
21	1,0424	1,2566	1,4908	1,7450	2,0192	2,3134	2,6276	2,9618	3,3160	3,6902
22	1,0445	1,2589	1,4933	1,7477	2,0221	2,3165	2,6309	2,9653	3,3197	3,6941
23	1,0465	1,2611	1,4957	1,7503	2,0249	2,3195	2,6341	2,9687	3,3233	3,6979
24	1,0486	1,2634	1,4982	1,7530	2,0278	2,3226	2,6374	2,9722	3,3270	3,7018
25	1,0506	1,2656	1,5006	1,7556	2,0306	2,3256	2,6406	2,9756	3,3306	3,7056
26	1,0527	1,2679	1,5031	1,7583	2,0335	2,3287	2,6439	2,9791	3,3343	3,7095
27	1,0547	1,2701	1,5055	1,7609	2,0363	2,3317	2,6471	2,9825	3,3379	3,7133
28	1,0568	1,2724	1,5080	1,7636	2,0392	2,3348	2,6504	2,9860	3,3416	3,7172
29	1,0588	1,2746	1,5104	1,7662	2,0420	2,3378	2,6536	2,9894	3,3452	3,7210
30	1,0609	1,2769	1,5129	1,7689	2,0449	2,3409	2,6569	2,9929	3,3489	3,7249
31	1,0630	1,2792	1,5154	1,7716	2,0478	2,3440	2,6602	2,9964	3,3526	3,7288
32	1,0650	1,2814	1,5178	1,7742	2,0506	2,3470	2,6634	2,9998	3,3562	3,7326
33	1,0671	1,2837	1,5203	1,7769	2,0535	2,3501	2,6667	3,0033	3,3599	3,7365
34	1,0692	1,2860	1,5228	1,7796	2,0564	2,3532	2,6700	3,0068	3,3636	3,7404
35	1,0712	1,2882	1,5252	1,7822	2,0592	2,3562	2,6732	3,0102	3,3672	3,7442
36	1,0733	1,2905	1,5277	1,7849	2,0621	2,3593	2,6765	3,0137	3,3709	3,7481
37	1,0754	1,2928	1,5302	1,7876	2,0650	2,3624	2,6798	3,0172	3,3746	3,7520
38	1,0774	1,2950	1,5326	1,7902	2,0678	2,3654	2,6830	3,0206	3,3782	3,7558
39	1,0795	1,2973	1,5351	1,7929	2,0707	2,3685	2,6863	3,0241	3,3819	3,7597
40	1,0816	1,2996	1,5376	1,7956	2,0736	2,3716	2,6896	3,0276	3,3856	3,7636
41	1,0837	1,3019	1,5401	1,7983	2,0765	2,3747	2,6929	3,0311	3,3893	3,7675
42	1,0858	1,3042	1,5426	1,8010	2,0794	2,3778	2,6962	3,0346	3,3930	3,7714
43	1,0878	1,3064	1,5450	1,8036	2,0822	2,3808	2,6994	3,0380	3,3966	3,7752
44	1,0899	1,3087	1,5475	1,8063	2,0851	2,3839	2,7027	3,0415	3,4003	3,7791
45	1,0920	1,3110	1,5500	1,8090	2,0880	2,3870	2,7060	3,0450	3,4040	3,7830
46	1,0941	1,3133	1,5525	1,8117	2,0909	2,3901	2,7093	3,0485	3,4077	3,7869
47	1,0962	1,3156	1,5550	1,8144	2,0938	2,3932	2,7126	3,0520	3,4114	3,7908
48	1,0983	1,3179	1,5575	1,8171	2,0967	2,3963	2,7159	3,0555	3,4151	3,7947
49	1,1004	1,3202	1,5600	1,8198	2,0996	2,3994	2,7192	3,0590	3,4188	3,7986

Digitized by Google

N	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
50	1,1025	1,3225	1,5625	1,8225	2,1025	2,4025	2,7225	3,0625	3,4225	3,8025
51	1,1046	1,3248	1,5650	1,8252	2,1054	2,4036	2,7258	3,0660	3,4262	3,8064
52	1,1067	1,3271	1,5675	1,8279	2,1083	2,4087	2,7291	3,0695	3,4299	3,8103
53	1,1088	1,3294	1,5700	1,8306	2,1112	2,4118	2,7324	3,0730	3,4336	3,8142
54	1,1109	1,3317	1,5725	1,8333	2,1141	2,4149	2,7357	3,0765	3,4373	3,8181
55	1,1130	1,3340	1,5750	1,8360	2,1170	2,4180	2,7390	3,0800	3,4410	3,8220
56	1,1151	1,3363	1,5775	1,8387	2,1199	2,4211	2,7423	3,0835	3,4447	3,8259
57	1,1172	1,3386	1,5800	1,8414	2,1228	2,4242	2,7456	3,0870	3,4484	3,8298
58	1,1194	1,3410	1,5826	1,8442	2,1258	2,4274	2,7490	3,0906	3,4522	3,8338
59	1,1215	1,3433	1,5851	1,8469	2,1287	2,4305	2,7523	3,0941	3,4559	3,8377
60	1,1236	1,3456	1,5876	1,8496	2,1316	2,4336	2,7556	3,0976	3,4596	3,8416
61	1,1257	1,3479	1,5901	1,8523	2,1345	2,4367	2,7589	3,1011	3,4633	3,8455
62	1,1278	1,3502	1,5926	1,8550	2,1374	2,4398	2,7622	3,1046	3,4670	3,8494
63	1,1300	1,3526	1,5952	1,8578	2,1404	2,4430	2,7656	3,1082	3,4708	3,8534
64	1,1321	1,3549	1,5977	1,8605	2,1433	2,4461	2,7689	3,1117	3,4745	3,8573
65	1,1342	1,3572	1,6002	1,8632	2,1462	2,4492	2,7722	3,1152	3,4782	3,8612
66	1,1364	1,3596	1,6028	1,8660	2,1492	2,4524	2,7756	3,1188	3,4820	3,8652
67	1,1385	1,3619	1,6053	1,8687	2,1521	2,4555	2,7789	3,1223	3,4857	3,8691
68	1,1406	1,3642	1,6078	1,8714	2,1550	2,4586	2,7822	3,1258	3,4894	3,8730
69	1,1428	1,3666	1,6104	1,8742	2,1580	2,4618	2,7856	3,1294	3,4932	3,8770
70	1,1449	1,3689	1,6129	1,8769	2,1609	2,4649	2,7889	3,1329	3,4969	3,8809
71	1,1470	1,3712	1,6154	1,8796	2,1638	2,4680	2,7922	3,1364	3,5006	3,8848
72	1,1492	1,3736	1,6180	1,8824	2,1668	2,4712	2,7956	3,1400	3,5044	3,8888
73	1,1513	1,3759	1,6205	1,8851	2,1697	2,4743	2,7989	3,1435	3,5081	3,8927
74	1,1535	1,3783	1,6231	1,8879	2,1727	2,4775	2,8023	3,1471	3,5119	3,8967
75	1,1556	1,3806	1,6256	1,8906	2,1756	2,4806	2,8056	3,1506	3,5156	3,9006
76	1,1578	1,3830	1,6282	1,8934	2,1786	2,4838	2,8090	3,1542	3,5194	3,9046
77	1,1599	1,3853	1,6307	1,8961	2,1815	2,4869	2,8123	3,1577	3,5231	3,9085
78	1,1621	1,3877	1,6333	1,8989	2,1845	2,4901	2,8157	3,1613	3,5269	3,9125
79	1,1642	1,3900	1,6358	1,9016	2,1874	2,4932	2,8190	3,1648	3,5306	3,9164
80	1,1664	1,3924	1,6384	1,9044	2,1904	2,4964	2,8224	3,1684	3,5344	3,9204
81	1,1686	1,3948	1,6410	1,9072	2,1934	2,4996	2,8258	3,1720	3,5382	3,9244
82	1,1707	1,3971	1,6435	1,9099	2,1963	2,5027	2,8291	3,1755	3,5419	3,9283
83	1,1729	1,3995	1,6461	1,9127	2,1993	2,5059	2,8325	3,1791	3,5457	3,9323
84	1,1751	1,4019	1,6487	1,9155	2,2023	2,5091	2,8359	3,1827	3,5495	3,9363
85	1,1772	1,4042	1,6512	1,9182	2,2052	2,5122	2,8392	3,1862	3,5532	3,9402
86	1,1794	1,4066	1,6538	1,9210	2,2082	2,5154	2,8426	3,1898	3,5570	3,9442
87	1,1816	1,4090	1,6564	1,9238	2,2112	2,5186	2,8460	3,1934	3,5608	3,9482
88	1,1837	1,4113	1,6589	1,9265	2,2141	2,5217	2,8493	3,1969	3,5645	3,9521
89	1,1859	1,4137	1,6615	1,9293	2,2171	2,5249	2,8527	3,2005	3,5683	3,9561
90	1,1881	1,4161	1,6641	1,9321	2,2201	2,5281	2,8561	3,2041	3,5721	3,9601
91	1,1903	1,4185	1,6667	1,9349	2,2231	2,5313	2,8595	3,2077	3,5759	3,9641
92	1,1925	1,4209	1,6693	1,9377	2,2261	2,5345	2,8629	3,2113	3,5797	3,9681
93	1,1946	1,4232	1,6718	1,9404	2,2290	2,5376	2,8662	3,2148	3,5834	3,9720
94	1,1968	1,4256	1,6744	1,9432	2,2320	2,5408	2,8696	3,2184	3,5872	3,9760
95	1,1990	1,4280	1,6770	1,9460	2,2350	2,5440	2,8730	3,2220	3,5910	3,9800
96	1,2012	1,4304	1,6796	1,9488	2,2380	2,5472	2,8764	3,2256	3,5948	3,9840
97	1,2034	1,4328	1,6822	1,9516	2,2410	2,5504	2,8798	3,2292	3,5986	3,9880
98	1,2036	1,4352	1,6848	1,9544	2,2440	2,5536	2,8832	3,2328	3,6024	3,9920
99	1,2078	1,4376	1,6874	1,9572	2,2470	2,5568	2,8866	3,2364	3,6062	3,9960

Digitized by Google

N	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
00	4,0000	4,4100	4,8400	5,2900	5,7600	6,2500	6,7600	7,2900	7,8400	8,4100
01	4,0040	4,4142	4,8444	5,2946	5,7648	6,2550	6,7652	7,2954	7,8456	8,4158
02	4,0080	4,4184	4,8488	5,2992	5,7696	6,2600	6,7704	7,3008	7,8512	8,4216
03	4,0120	4,4226	4,8532	5,3038	5,7744	6,2650	6,7756	7,3062	7,8568	8,4274
04	4,0160	4,4268	4,8576	5,3084	5,7792	6,2700	6,7808	7,3116	7,8624	8,4332
05	4,0200	4,4310	4,8620	5,3130	5,7840	6,2750	6,7860	7,3170	7,8680	8,4390
06	4,0240	4,4352	4,8664	5,3176	5,7888	6,2800	6,7912	7,3224	7,8736	8,4448
07	4,0280	4,4394	4,8708	5,3222	5,7936	6,2850	6,7964	7,3278	7,8792	8,4506
08	4,0321	4,4437	4,8753	5,3269	5,7985	6,2901	6,8017	7,3333	7,8849	8,4565
09	4,0361	4,4479	4,8797	5,3315	5,8033	6,2951	6,8069	7,3387	7,8905	8,4623
10	4,0401	4,4521	4,8841	5,3361	5,8081	6,3001	6,8121	7,3441	7,8961	8,4681
11	4,0441	4,4563	4,8885	5,3407	5,8129	6,3051	6,8173	7,3495	7,9017	8,4739
12	4,0481	4,4605	4,8929	5,3453	5,8177	6,3101	6,8225	7,3549	7,9073	8,4797
13	4,0522	4,4648	4,8974	5,3500	5,8226	6,3152	6,8278	7,3604	7,9130	8,4856
14	4,0562	4,4690	4,9018	5,3546	5,8274	6,3202	6,8330	7,3658	7,9186	8,4914
15	4,0602	4,4732	4,9062	5,3592	5,8322	6,3252	6,8382	7,3712	7,9242	8,4972
16	4,0643	4,4775	4,9107	5,3639	5,8371	6,3303	6,8435	7,3767	7,9299	8,5031
17	4,0683	4,4817	4,9151	5,3685	5,8419	6,3353	6,8487	7,3821	7,9355	8,5089
18	4,0723	4,4859	4,9195	5,3731	5,8467	6,3403	6,8539	7,3875	7,9411	8,5147
19	4,0764	4,4902	4,9240	5,3778	5,8516	6,3454	6,8592	7,3930	7,9468	8,5206
20	4,0804	4,4944	4,9284	5,3824	5,8564	6,3504	6,8644	7,3984	7,9524	8,5264
21	4,0844	4,4986	4,9328	5,3870	5,8612	6,3554	6,8696	7,4038	7,9580	8,5322
22	4,0885	4,5029	4,9373	5,3917	5,8661	6,3605	6,8749	7,4093	7,9637	8,5381
23	4,0925	4,5071	4,9417	5,3963	5,8709	6,3655	6,8801	7,4147	7,9693	8,5439
24	4,0966	4,5114	4,9462	5,4010	5,8758	6,3706	6,8854	7,4202	7,9750	8,5498
25	4,1006	4,5156	4,9506	5,4056	5,8806	6,3756	6,8906	7,4256	7,9806	8,5556
26	4,1047	4,5199	4,9551	5,4103	5,8855	6,3807	6,8959	7,4311	7,9863	8,5615
27	4,1087	4,5241	4,9595	5,4149	5,8903	6,3857	6,9011	7,4365	7,9919	8,5673
28	4,1128	4,5284	4,9640	5,4196	5,8952	6,3908	6,9064	7,4420	7,9976	8,5732
29	4,1168	4,5326	4,9684	5,4242	5,9000	6,3958	6,9116	7,4474	8,0032	8,5790
30	4,1209	4,5369	4,9729	5,4289	5,9049	6,4009	6,9169	7,4529	8,0089	8,5849
31	4,1250	4,5412	4,9774	5,4336	5,9098	6,4060	6,9222	7,4584	8,0146	8,5908
32	4,1290	4,5454	4,9818	5,4382	5,9146	6,4110	6,9274	7,4638	8,0202	8,5966
33	4,1331	4,5497	4,9863	5,4429	5,9195	6,4161	6,9327	7,4693	8,0259	8,6025
34	4,1372	4,5540	4,9908	5,4476	5,9244	6,4212	6,9380	7,4748	8,0316	8,6084
35	4,1412	4,5582	4,9952	5,4522	5,9292	6,4262	6,9432	7,4802	8,0372	8,6142
36	4,1453	4,5625	4,9997	5,4569	5,9341	6,4313	6,9485	7,4857	8,0429	8,6201
37	4,1494	4,5668	5,0042	5,4616	5,9390	6,4364	6,9538	7,4912	8,0486	8,6260
38	4,1534	4,5710	5,0086	5,4662	5,9438	6,4414	6,9590	7,4966	8,0542	8,6318
39	4,1575	4,5753	5,0131	5,4709	5,9487	6,4465	6,9643	7,5021	8,0599	8,6377
40	4,1616	4,5796	5,0176	5,4756	5,9536	6,4516	6,9696	7,5076	8,0656	8,6436
41	4,1657	4,5839	5,0221	5,4803	5,9585	6,4567	6,9749	7,5131	8,0713	8,6495
42	4,1698	4,5882	5,0266	5,4850	5,9634	6,4618	6,9802	7,5186	8,0770	8,6554
43	4,1738	4,5924	5,0310	5,4896	5,9682	6,4668	6,9854	7,5240	8,0826	8,6612
44	4,1779	4,5967	5,0355	5,4943	5,9731	6,4719	6,9907	7,5295	8,0883	8,6671
45	4,1820	4,6010	5,0400	5,4990	5,9780	6,4770	6,9960	7,5350	8,0940	8,6730
46	4,1861	4,6053	5,0445	5,5037	5,9829	6,4821	7,0013	7,5405	8,0997	8,6789
47	4,1902	4,6096	5,0490	5,5084	5,9878	6,4872	7,0066	7,5460	8,1054	8,6848
48	4,1943	4,6139	5,0535	5,5131	5,9927	6,4923	7,0119	7,5515	8,1111	8,6907
49	4,1984	4,6182	5,0580	5,5178	5,9976	6,4974	7,0172	7,5570	8,1168	8,6966

Digitized by Google

N	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
50	4,2025	4,6225	5,0625	5,5225	6,0025	6,5025	7,0225	7,5625	8,1225	8,7025
51	4,2066	4,6268	5,0670	5,5272	6,0074	6,5076	7,0278	7,5680	8,1282	8,7084
52	4,2107	4,6311	5,0715	5,5319	6,0123	6,5127	7,0331	7,5735	8,1339	8,7143
53	4,2148	4,6354	5,0760	5,5366	6,0172	6,5178	7,0384	7,5790	8,1396	8,7202
54	4,2189	4,6397	5,0805	5,5413	6,0221	6,5229	7,0437	7,5845	8,1453	8,7261
55	4,2230	4,6440	5,0850	5,5460	6,0270	6,5280	7,0490	7,5900	8,1510	8,7320
56	4,2271	4,6483	5,0895	5,5507	6,0319	6,5331	7,0543	7,5955	8,1567	8,7379
57	4,2312	4,6526	5,0940	5,5554	6,0368	6,5382	7,0596	7,6010	8,1624	8,7438
58	4,2354	4,6570	5,0986	5,5602	6,0418	6,5434	7,0650	7,6066	8,1682	8,7498
59	4,2395	4,6613	5,1031	5,5649	6,0467	6,5485	7,0703	7,6121	8,1739	8,7557
60	4,2436	4,6656	5,1076	5,5696	6,0516	6,5536	7,0756	7,6176	8,1796	8,7616
61	4,2477	4,6699	5,1121	5,5743	6,0565	6,5587	7,0809	7,6231	8,1853	8,7675
62	4,2518	4,6742	5,1166	5,5790	6,0614	6,5638	7,0862	7,6286	8,1910	8,7734
63	4,2560	4,6786	5,1212	5,5838	6,0664	6,5690	7,0916	7,6342	8,1968	8,7794
64	4,2601	4,6829	5,1257	5,5885	6,0713	6,5741	7,0969	7,6397	8,2025	8,7853
65	4,2642	4,6872	5,1302	5,5932	6,0762	6,5792	7,1022	7,6452	8,2082	8,7912
66	4,2684	4,6916	5,1348	5,5980	6,0812	6,5844	7,1076	7,6508	8,2140	8,7972
67	4,2725	4,6959	5,1393	5,6027	6,0861	6,5895	7,1129	7,6563	8,2197	8,8031
68	4,2766	4,7002	5,1438	5,6074	6,0910	6,5946	7,1182	7,6618	8,2254	8,8090
69	4,2808	4,7046	5,1484	5,6122	6,0960	6,5998	7,1236	7,6674	8,2312	8,8150
70	4,2849	4,7089	5,1529	5,6169	6,1009	6,6049	7,1289	7,6729	8,2369	8,8209
71	4,2890	4,7132	5,1574	5,6216	6,1058	6,6100	7,1342	7,6784	8,2426	8,8268
72	4,2932	4,7176	5,1620	5,6264	6,1108	6,6152	7,1396	7,6840	8,2484	8,8328
73	4,2973	4,7219	5,1665	5,6311	6,1157	6,6203	7,1449	7,6895	8,2541	8,8387
74	4,3015	4,7263	5,1711	5,6359	6,1207	6,6255	7,1503	7,6951	8,2599	8,8447
75	4,3056	4,7306	5,1756	5,6406	6,1256	6,6306	7,1556	7,7006	8,2656	8,8506
76	4,3098	4,7350	5,1802	5,6454	6,1306	6,6358	7,1610	7,7062	8,2714	8,8566
77	4,3139	4,7393	5,1847	5,6501	6,1355	6,6409	7,1663	7,7117	8,2771	8,8625
78	4,3181	4,7437	5,1893	5,6549	6,1405	6,6461	7,1717	7,7173	8,2829	8,8685
79	4,3222	4,7480	5,1938	5,6596	6,1454	6,6512	7,1770	7,7228	8,2886	8,8744
80	4,3264	4,7524	5,1984	5,6644	6,1504	6,6564	7,1824	7,7284	8,2944	8,8804
81	4,3306	4,7568	5,2030	5,6692	6,1554	6,6616	7,1878	7,7340	8,3002	8,8864
82	4,3347	4,7611	5,2075	5,6739	6,1603	6,6667	7,1931	7,7395	8,3059	8,8923
83	4,3389	4,7655	5,2121	5,6787	6,1653	6,6719	7,1985	7,7451	8,3117	8,8983
84	4,3431	4,7699	5,2167	5,6835	6,1703	6,6771	7,2039	7,7507	8,3175	8,9043
85	4,3472	4,7742	5,2212	5,6882	6,1752	6,6822	7,2092	7,7562	8,3232	8,9102
86	4,3514	4,7786	5,2258	5,6930	6,1802	6,6874	7,2146	7,7618	8,3290	8,9162
87	4,3556	4,7830	5,2304	5,6978	6,1852	6,6926	7,2200	7,7674	8,3348	8,9222
88	4,3597	4,7873	5,2349	5,7025	6,1901	6,6977	7,2253	7,7729	8,3405	8,9281
89	4,3639	4,7917	5,2395	5,7073	6,1951	6,7029	7,2307	7,7785	8,3463	8,9341
90	4,3681	4,7961	5,2441	5,7121	6,2001	6,7081	7,2361	7,7841	8,3521	8,9401
91	4,3723	4,8005	5,2487	5,7169	6,2051	6,7133	7,2415	7,7897	8,3579	8,9461
92	4,3765	4,8049	5,2533	5,7217	6,2101	6,7185	7,2469	7,7953	8,3637	8,9521
93	4,3806	4,8092	5,2578	5,7264	6,2150	6,7236	7,2522	7,8008	8,3694	8,9580
94	4,3848	4,8136	5,2624	5,7312	6,2200	6,7288	7,2576	7,8064	8,3752	8,9640
95	4,3890	4,8180	5,2670	5,7360	6,2250	6,7340	7,2630	7,8120	8,3810	8,9700
96	4,3932	4,8224	5,2716	5,7408	6,2300	6,7392	7,2684	7,8176	8,3868	8,9760
97	4,3974	4,8268	5,2762	5,7456	6,2350	6,7444	7,2738	7,8232	8,3926	8,9820
98	4,4016	4,8312	5,2808	5,7504	6,2400	6,7496	7,2792	7,8288	8,3984	8,9880
99	4,4058	4,8356	5,2854	5,7552	6,2450	6,7548	7,2846	7,8344	8,4042	8,9940

Digitized by Google

N	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
00	9,0000	9,6100	10,2400	10,8900	11,5600	12,2500	12,9600	13,6900	14,4400	15,2100
01	9,0060	9,6162	10,2464	10,8966	11,5668	12,2570	12,9672	13,6974	14,4476	15,2178
02	9,0120	9,6224	10,2528	10,9032	11,5736	12,2640	12,9744	13,7048	14,4552	15,2256
03	9,0180	9,6286	10,2592	10,9098	11,5804	12,2710	12,9816	13,7122	14,4628	15,2334
04	9,0240	9,6348	10,2656	10,9164	11,5872	12,2780	12,9888	13,7196	14,4704	15,2412
05	9,0300	9,6410	10,2720	10,9230	11,5940	12,2850	12,9960	13,7270	14,4780	15,2490
06	9,0360	9,6472	10,2784	10,9296	11,6008	12,2920	13,0032	13,7344	14,4856	15,2568
07	9,0420	9,6534	10,2848	10,9362	11,6076	12,2990	13,0104	13,7418	14,4932	15,2646
08	9,0481	9,6597	10,2913	10,9429	11,6145	12,3061	13,0177	13,7493	14,5009	15,2725
09	9,0541	9,6659	10,2977	10,9495	11,6213	12,3131	13,0249	13,7567	14,5085	15,2803
10	9,0601	9,6721	10,3041	10,9561	11,6281	12,3201	13,0321	13,7641	14,5161	15,2881
11	9,0661	9,6783	10,3105	10,9627	11,6349	12,3271	13,0393	13,7715	14,5237	15,2959
12	9,0721	9,6845	10,3169	10,9693	11,6417	12,3341	13,0465	13,7789	14,5313	15,3037
13	9,0782	9,6908	10,3234	10,9760	11,6486	12,3412	13,0538	13,7864	14,5390	15,3116
14	9,0842	9,6970	10,3298	10,9826	11,6554	12,3482	13,0610	13,7938	14,5466	15,3194
15	9,0902	9,7032	10,3362	10,9892	11,6622	12,3552	13,0682	13,8012	14,5542	15,3272
16	9,0963	9,7095	10,3427	10,9959	11,6691	12,3623	13,0755	13,8087	14,5619	15,3351
17	9,1023	9,7157	10,3491	11,0025	11,6759	12,3693	13,0827	13,8161	14,5695	15,3429
18	9,1083	9,7219	10,3555	11,0091	11,6827	12,3763	13,0899	13,8235	14,5771	15,3507
19	9,1144	9,7282	10,3620	11,0158	11,6896	12,3834	13,0972	13,8310	14,5848	15,3586
20	9,1204	9,7344	10,3684	11,0224	11,6964	12,3904	13,1044	13,8384	14,5924	15,3664
21	9,1264	9,7406	10,3748	11,0290	11,7032	12,3974	13,1116	13,8458	14,6000	15,3742
22	9,1325	9,7469	10,3813	11,0357	11,7101	12,4045	13,1189	13,8533	14,6077	15,3821
23	9,1385	9,7531	10,3877	11,0423	11,7169	12,4115	13,1261	13,8607	14,6153	15,3899
24	9,1446	9,7594	10,3942	11,0490	11,7238	12,4186	13,1334	13,8682	14,6230	15,3978
25	9,1506	9,7656	10,4006	11,0556	11,7306	12,4256	13,1406	13,8756	14,6306	15,4056
26	9,1567	9,7719	10,4071	11,0623	11,7375	12,4327	13,1479	13,8831	14,6383	15,4135
27	9,1627	9,7781	10,4135	11,0689	11,7443	12,4397	13,1551	13,8905	14,6459	15,4213
28	9,1688	9,7844	10,4200	11,0756	11,7512	12,4468	13,1624	13,8980	14,6536	15,4292
29	9,1748	9,7906	10,4264	11,0822	11,7580	12,4538	13,1696	13,9054	14,6612	15,4370
30	9,1809	9,7969	10,4329	11,0889	11,7649	12,4609	13,1769	13,9129	14,6689	15,4449
31	9,1870	9,8032	10,4394	11,0956	11,7718	12,4680	13,1842	13,9204	14,6766	15,4528
32	9,1930	9,8094	10,4458	11,1022	11,7786	12,4750	13,1914	13,9278	14,6842	15,4606
33	9,1991	9,8157	10,4523	11,1089	11,7855	12,4821	13,1987	13,9353	14,6919	15,4685
34	9,2052	9,8220	10,4588	11,1156	11,7924	12,4892	13,2060	13,9428	14,6996	16,4764
35	9,2112	9,8282	10,4652	11,1222	11,7992	12,4962	13,2132	13,9502	14,7072	15,4842
36	9,2173	9,8345	10,4717	11,1289	11,8061	12,5033	13,2205	13,9577	14,7149	15,4921
37	9,2234	9,8408	10,4782	11,1356	11,8130	12,5104	13,2278	13,9652	14,7226	15,5000
38	9,2294	6,8470	10,4846	11,1422	11,8198	12,5174	13,2350	13,9726	14,7302	15,5078
39	9,2355	9,8533	10,4911	11,1489	11,8267	12,5245	13,2423	13,9801	14,7379	15,5157
40	9,2416	9,8596	10,4976	11,1556	11,8336	12,5316	13,2496	13,9876	14,7456	15,5236
41	9,2477	9,8659	10,5041	11,1623	11,8405	12,5387	13,2569	13,9951	14,7533	15,5315
42	9,2538	9,8722	10,5106	11,1690	11,8474	12,5458	13,2642	14,0026	14,7610	15,5394
43	9,2598	9,8784	10,5170	11,1756	11,8542	12,5528	13,2714	14,0100	14,7686	15,5472
44	9,2659	9,8847	10,5235	11,1823	11,8611	12,5599	13,2787	14,0175	14,7763	15,5551
45	9,2720	9,8910	10,5300	11,1890	11,8680	12,5670	13,2860	14,0250	14,7840	15,5630
46	9,2731	9,8973	10,5365	11,1957	11,8749	12,5741	13,2933	14,0325	14,7917	15,5709
47	9,2842	9,9036	10,5430	11,2024	11,8818	12,5812	13,3006	14,0400	14,7994	15,5788
48	9,2903	9,9099	10,5495	11,2091	11,8887	12,5883	13,3079	14,0475	14,8071	15,5867
49	9,2964	9,9162	10,5560	11,2158	11,8956	12,5959	13,3152	14,0550	14,8148	15,5946

Digitized by Google

N	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
50	9,3025	9,9225	10,5625	11,2225	11,9025	12,6025	13,3225	14,0625	14,8225	15,6025
51	9,3086	9,9288	10,5690	11,2292	11,9094	12,6096	13,3298	14,0700	14,8302	15,6104
52	9,3147	9,9351	10,5755	11,2359	11,9163	12,6167	13,3371	14,0775	14,8379	15,6183
53	9,3208	9,9414	10,5820	11,2426	11,9232	12,6238	13,3444	14,0850	14,8456	15,6262
54	9,3269	9,9477	10,5885	11,2493	11,9301	12,6309	13,3517	14,0925	14,8533	15,6341
55	9,3330	9,9540	10,5950	11,2560	11,9370	12,6380	13,3590	14,1000	14,8610	15,6420
56	8,3391	9,9603	10,6015	11,2627	11,9439	12,6451	13,3663	14,1075	14,8687	15,6499
57	9,3452	9,9666	10,6080	11,2694	11,9508	12,6522	13,3736	14,1150	14,8764	15,6578
58	9,3514	9,9730	10,6146	11,2762	11,9578	12,6594	13,3810	14,1226	14,8842	15,6658
59	9,3575	9,9793	10,6211	11,2829	11,9647	12,6665	13,3883	14,1301	14,8919	15,6737
60	9,3636	9,9856	10,6276	11,2896	11,9716	22,6736	13,3956	14,1376	14,8996	15,6816
61	9,3697	9,9919	10,6341	11,2963	11,9785	12,6807	13,4029	14,1451	14,9073	15,6895
62	9,3758	9,9982	10,6406	11,3030	11,9854	12,6878	13,4102	14,1526	14,9150	15,6974
63	9,3820	10,0046	10,6472	11,3098	11,9924	12,6950	13,4176	14,1602	14,9228	15,7054
64	9,3881	10,0109	10,6537	11,3165	11,9993	12,7021	13,4249	14,1677	14,9305	15,7133
65	9,3942	10,0172	10,6602	11,3232	12,0062	12,7092	13,4322	14,1752	14,9382	15,7212
66	9,4004	10,0236	10,6668	11,3300	12,0132	12,7164	13,4396	14,1828	14,9460	15,7292
67	9,4065	10,0299	10,6733	11,3367	12,0201	12,7235	13,4469	14,1903	14,9237	15,7371
68	9,4126	10,0362	10,6798	11,3434	12,0270	12,7306	13,4542	14,1978	14,9614	15,7450
69	9,4188	10,0426	10,6864	11,3502	12,0340	12,7378	13,4616	14,2054	14,9692	15,7530
70	9,4249	10,0489	10,6929	11,3569	12,0409	12,7449	13,4689	14,2129	14,9769	15,7609
71	9,4310	10,0552	10,6994	11,3636	12,0478	12,7520	13,4762	14,2204	14,9846	15,7688
72	9,4372	10,0616	10,7060	11,3704	12,0548	12,7592	13,4836	14,2280	14,9924	15,7768
73	9,4433	10,0679	10,7125	11,3771	12,0617	12,7663	13,4909	14,2355	15,0001	15,7847
74	9,4495	10,0743	10,7191	11,3859	12,0687	12,7735	13,4983	14,2431	15,0079	15,7927
75	9,4556	10,0806	10,7256	11,3906	12,0756	12,7806	13,5056	14,2506	15,0156	15,8006
76	9,4618	10,0870	10,7322	11,3974	12,0826	12,7878	13,5130	14,2582	15,0234	15,8086
77	9,4679	10,0933	10,7387	11,4041	12,0895	12,7949	13,5203	14,2657	15,0311	15,8165
78	9,4741	10,0997	10,7453	11,4109	12,0965	12,8021	13,5277	14,2733	15,0389	15,8245
79	9,4802	10,1060	10,7518	11,4176	12,1034	12,8092	13,5350	14,2808	15,0466	15,8324
80	9,4864	10,1124	10,7584	11,4244	12,1104	12,8164	13,5424	14,2884	15,0544	15,8404
81	9,4926	10,1188	10,7650	11,4312	12,1174	12,8236	13,5498	14,2960	15,0622	15,8484
82	9,4987	10,1251	10,7715	11,4379	12,1243	12,8307	13,5571	14,3035	15,0699	15,8563
83	9,5049	10,1315	10,7781	11,4447	12,1313	12,8379	13,5645	14,3111	15,0777	15,8643
84	9,5111	10,1379	10,7847	11,4515	12,1383	12,8451	13,5719	14,3187	15,0855	15,8723
85	9,5172	10,1442	10,7912	11,4582	12,1452	12,8522	13,5792	14,3262	15,0932	15,8802
86	9,5234	10,1506	10,7978	11,4650	12,1522	12,8594	13,5866	14,3338	15,1010	15,8882
87	9,5296	10,1570	10,8044	11,4718	12,1592	12,8666	13,5940	14,3414	15,1088	15,8962
88	9,5357	10,1633	10,8109	11,4785	12,1661	12,8737	13,6013	14,3489	15,1165	15,9041
89	9,5419	10,1697	10,8175	11,4853	12,1731	12,8809	13,6087	14,3565	15,1243	15,9121
90	9,5481	10,1761	10,8241	11,4921	12,1801	12,8881	13,6161	14,3641	15,1321	15,9201
91	9,5543	10,1825	10,8307	11,4989	12,1871	12,8953	13,6235	14,3717	15,1399	15,9281
92	9,5605	10,1889	10,8373	11,5057	12,1941	12,9025	13,6309	14,3793	15,1477	15,9361
93	9,5666	10,1952	10,8438	11,5124	12,2010	12,9096	13,6382	14,3868	15,1554	15,9440
94	9,5728	10,2016	10,8504	11,5192	12,2080	12,9168	13,6456	13,3944	15,1632	15,9520
95	9,5790	10,2080	10 8570	11,5260	12,2150	12,9240	13,6530	14,4020	15,1710	15,9600
96	9,5852	10,2144	10,8636	11,5328	12,2220	12,9312	13,6604	14,4096	15,1788	15,9680
97	9,5914	10,2208	10,8702	11,5396	12,2290	12,9384	13,6678	14,4172	15,1866	15,9760
98	9,5976	10,2272	10,8768	11,5464	12,2360	12,9456	13,6752	14,4248	15,1944	15,9840
99	9,6038	10,2336	10,8834	11,5532	12,2430	12,9528	13,6826	14,4324	15,2022	15,9920

Digitized by Google

N	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
00	16,0000	16,8100	17,6400	18,4900	19,3600	20,2500	21,1600	22,0900	23,0400	24,0100
01	16,0080	16,8182	17,6484	18,4986	19,3688	20,2590	21,1692	22,0994	23,0496	24,0198
02	16,0160	16,8264	17,6568	18,5072	19,3776	20,2689	21,1784	22,1088	23,0592	24,0296
03	16,0240	16,8346	17,6652	18,5158	19,3864	20,2770	21,1876	22,1182	23,0688	24,0394
04	16,0320	16,8428	17,6736	18,5244	19,3952	20,2860	21,1968	22,1276	23,0784	24,0492
05	16,0400	16,8510	17,6820	18,5330	19,4040	20,2950	21,2060	22,1370	23,0880	24,0590
06	16,0480	16,8592	17,6904	18,5416	19,4128	20,3040	21,2152	22,1464	23,0976	24,0688
07	16,0560	16,8674	17,6988	18,5502	19,4216	20,3130	21,2244	22,1558	23,1072	24,0786
08	16,0641	16,8757	17,7073	18,5589	19,4305	20,3221	21,2337	22,1653	23,1169	24,0885
09	16,0721	16,8839	17,7157	18,5675	19,4393	20,3311	21,2429	22,1747	23,1265	24,0983
10	16,0801	16,8921	17,7241	18,5761	19,4481	20,3401	21,2521	22,1841	23,1361	24,1081
11	16,0881	16,9003	17,7325	18,5847	19,4569	20,3491	21,2613	22,1935	23,1457	24,1179
12	16,0961	16,9085	17,7409	18,5933	19,4657	20,3581	21,2705	22,2029	23,1553	24,1277
13	16,1042	16,9168	17,7494	18,6020	19,4746	20,3672	21,2798	22,2124	23,1650	24,1376
14	16,1122	16,9250	17,7578	18,6160	19,4834	20,3762	21,2890	22,2218	23,1746	24,1474
15	16,1202	16,9332	17,7662	18,6192	19,4922	20,3852	21,2982	22,2312	23,1842	24,1572
16	16,1283	16,9415	17,7747	18,6279	19,5011	20,3943	21,3075	22,2407	23,1939	24,1671
17	16,1363	16,9497	17,7831	18,6365	19,5099	20,4033	21,3167	22,2501	23,2035	24,1769
18	16,1443	16,9579	17,7915	18,6451	19,5187	20,4123	21,3259	22,2595	23,2131	24,1867
19	16,1524	16,9662	17,8000	18,6538	19,5276	20,4214	21,3352	22,2690	23,2228	24,1966
20	16,1604	16,9744	17,8084	18,6624	19,5364	20,4304	21,3444	22,2784	23,2324	24,2064
21	16,1684	16,9826	17,8168	18,6710	19,5452	20,4394	21,3536	22,2878	23,2420	24,2162
22	16,1765	16,9909	17,8253	18,6797	19,5541	20,4485	21,3629	22,2973	23,2517	24,2261
23	16,1845	16,9991	17,8337	18,6883	19,5629	20,4575	21,3721	22,3067	23,2613	24,2359
24	16,1926	17,0074	17,8422	18,6970	19,5718	20,4660	21,3814	22,3162	23,2710	24,2458
25	16,2006	17,0156	17,8506	18,7056	19,5806	20,4756	21,3906	22,3256	23,2806	24,2556
26	16,2087	17,0239	17,8591	18,7143	19,5895	20,4847	21,3999	22,3351	23,2903	24,2655
27	16,2167	17,0321	17,8675	18,7229	19,5983	20,4937	21,4091	22,3445	23,2999	24,2753
28	16,2248	17,0404	17,8760	18,7316	19,6072	20,5028	21,4184	22,3540	23,3096	24,2852
29	16,2328	17,0486	17,8844	18,7402	19,6160	20,5118	21,4276	22,3634	23,3192	24,2950
30	16,2409	17,0569	17,8929	18,7489	19,6249	20,5209	21,4369	22,3729	23,3289	24,3049
31	16,2490	17,0652	17,9014	18,7576	19,6338	20,5300	21,4462	22,3824	23,3386	24,3148
32	16,2570	17,0734	17,9098	18,7662	19,6426	20,5390	21,4554	22,3918	23,3482	24,3246
33	16,2651	17,0817	17,9183	18,7749	19,6515	20,5481	51,4647	22,4013	23,3579	24,3345
34	16,2732	17,0900	17,9268	18,7836	19,6604	20,5572	21,4740	22,4108	23,3676	24,3444
35	16,2812	17,0982	17,9352	18,7922	19,6692	20,5662	21,4832	22,4202	45,3772	24,3542
36	16,2893	17,1065	17,9437	18,8009	19,6781	20,5753	21,4925	22,4297	23,3869	24,3641
37	16,2974	17,1148	17,9522	18,8096	19,6870	20,5844	21,5018	22,4392	23,3966	24,3740
38	16,3054	17,1230	17,9606	18,8182	19,6958	20,5934	21,5110	22,4486	23,4062	24,3838
39	16,3135	17,1313	17.9691	18,8269	19,7047	20,6025	21,5203	22,4581	23,4159	24,3937
40	16,3216	17,1396	17,9776	18,8356	19,7136	20,6116	21,5296	22,4676	23,4256	24,4036
41	16 3297	17,1479	17,9861	18,8443	19,7225	20,6207	21,5389	22,4771	23,4353	24,4135
42	16,3378	17,1562	17,9946	18,8530	19,7314	20,6298	21,5482	22,4866	23,4450	24,4234
43	16,3458	17,1644	18,0030	18,8616	19,7402	20,6388	21,5574	22,4960	23,4546	24,4332
44	16,3539	17,1727	18,0115	18,8703	19,7491	20,6479	21,5667	22,5055	23,4643	24,4431
45	16,3620	17,1810	18,0200	18,8790	19,7580	20,6570	21,5760	22,5150	23,4740	24,4530
46	16,3701	17,1893	18,0285	18,8877	19,7669	20,6661	21,5853	22,5245	23,4837	24,4629
47	16,3782	17,1976	18,0370	18,8964	19,7758	20,6572	21,5946	22,5340	23,4934	24,4728
48	16,3863	17,2059	18,0455	18,9051	19,7847	20,6843	21,6039	22,5435	23,5031	24,4827
49	16,3944	17,2142	18,0540	18,9138	19,7936	20,6934	21,6132	22,5530	23,5128	24,4926

Digitized by Google

N	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
50	16,4025	17,2225	18,0625	18,9225	19,8025	20,7025	21,6225	22,5625	23,5225	24,5025
51	16,4106	17,2308	18,0710	18,9312	19,8114	20,7116	21,6318	22,5720	23,5322	24,5124
52	16,4187	17,2391	18,0795	18,9399	19,8203	20,7207	21,6411	22,5815	23,5419	24,5223
53	16,4268	17,2474	18,0880	18,9486	19,8292	20,7298	21,6504	22,5910	23,5516	24,5322
54	16,4349	17,2557	18,0965	18,9573	19,8381	20,7389	21,6597	22,6005	23,5617	24,5421
55	16,4430	17,2640	18,1050	18,9660	19,8470	20,7480	21,6690	22,6100	23,5710	24,5320
56	16,4511	17,2723	18,1135	18,9747	19,8559	20,7571	21,6783	22,6195	23,5807	24,5619
57	16,4592	17,2806	18,1220	18,9834	19,8648	20,7662	21,6876	22,6290	23,5904	24,5718
58	16,4674	17,2890	18,1306	18,9922	19,8738	20,7754	21,6970	22,6386	23,6002	24,5818
59	16,4755	17,2973	18,1391	19,0009	19,8827	20,7845	21,7063	22,6481	23,6099	24,5917
60	16,4836	17,3056	18,1476	19,0096	19,8916	20,7936	21,7156	22,6576	23,6196	24,6016
61	16,4917	17,3139	18,1561	19,0183	19,9005	20,8027	21,7249	22,6671	23,6297	24,6115
62	16,4998	17,3222	18,1646	19,0270	19,9094	20,8118	21,7342	22,6766	23,6390	24,6214
63	16,5080	17,3306	18,1732	19,0358	19,9184	20,8210	21,7436	22,6862	23,6488	24,6314
64	16,5161	17,3389	18,1817	19,0445	19,9273	20,8301	21,7529	22,6957	23,6585	24,6413
65	16,5242	17,3472	18,1902	19,0532	19,9362	20,8392	21,7622	22,7052	23,6682	24,6512
66	16,5324	17,3556	18,1988	19,0620	19,9452	20,8484	21,7716	22,7148	23,6780	24,6612
67	16,5504	17,3639	18,2073	19,0707	19,9541	20,8575	21,7809	22,7243	23,6877	24,6711
68	16,5486	17,3722	18,2158	19,0794	19,9630	20,8666	21,7902	22,7338	23,6974	24,6810
69	16,5586	17,3806	18,2244	19,0882	19,9720	20,8758	21,7996	22,7434	23,7072	24,6910
70	16,5649	17,3889	18,2329	19,0609	19,9809	20,8849	21,8089	22,7529	23,7169	24,7009
71	16,5730	17,3972	18,2414	19,1056	19,9998	20,8940	21,8182	22,7624	23,7266	24,7108
72	16,5812	17,4056	18,2500	16,1144	19,9988	20,9032	21,8276	22,7720	23,7364	24,7208
73	16,5893	17,4139	18,2585	19,1231	20,0077	20,9123	21,8369	22,7815	23,7461	24,7307
74	16,5975	17,4223	18,2671	19,1319	20,0167	20,9215	21,8463	22,7911	23,7559	24,7407
75	16,6056	17,4306	18,2756	19,1406	20,0256	20,9306	21,8556	22,8006	23,7656	24,7506
76	16,6138	17,4390	18,2842	19,1494	20,0346	20,9398	21,8650	22,8102	23,7754	24,7606
77	16,6219	17,4473	18,2927	19,1581	20,0435	20,9489	21,8743	22,8197	23,7851	24,7705
78	16,6301	17,4557	18,3013	19,1669	20,0525	20,9581	21,8837	22,8293	23,7949	24,7805
79	16,6382	17,4640	18,3098	19,1756	20,0614	20,9672	21,8930	22,8388	23,8046	24,7904
80	16,6464	17,4724	18,3184	19,1844	20,0704	20,9764	21,9024	22,8484	23,8144	24,8004
81	16,6546	17,4808	18,3270	19,1932	20,0794	20,9856	21,9118	22,8580	23,8242	24,8104
82	16,6627	17,4891	18,3355	19,2019	20,0883	20,9947	21,9211	22,8675	23,8339	24,8203
83	16,6709	17,4975	18,3441	19,2107	20,0973	21,0039	21,9305	22,8771	23,8437	24,8303
84	16,6791	17,5059	18,3527	19,2195	20,1063	21,0131	21,9399	22,8867	23,8535	24,8403
85	16,6872	17,5742	18,3612	19,2282	20,1152	21,0222	21,9492	22,8962	23,8632	24,8502
86	16,6954	17,5226	18,3698	19,2370	20,1242	21,0314	21,9586	22,9058	23,8730	24,8602
87	16,7036	17,5310	18,3784	19,2458	20,1332	21,0406	21,9680	22,9154	23,8828	24,8702
88	16,7117	17,5393	18,3869	19,2545	20,1421	21,0497	21,9773	22,9249	23,8925	24,8801
89	16,7199	17,5477	18,3955	19,2633	20,1511	21,0589	21,9867	22,9345	23,9024	24,8901
90	16,7281	17,5561	18,4041	19,2721	20,1601	21,0681	21,9961	22,9441	23,9121	24,9001
91	16,7363	17,5645	18,4127	19,2809	20,1691	21,0773	22,0055	22,9537	23,9219	24,9101
92	16,7445	17,5729	18,4213	19,2897	20,1781	21,0865	22,0149	22,9633	23,9317	24,9201
93	16,7326	17,5812	18,4298	19,2984	20,1870	21,0956	22,0242	22,9728	23,9414	24,9300
94	16,7608	17,5896	18,4384	19,3072	20,1960	21,1048	22,0336	22,9824	23,9512	24,9400
95	16,7690	17,5980	18,4470	19,3160	20,2050	21,1140	22,0430	22,9920	23,9610	24,9500
96	16,7772	17,6064	18,4556	19,3248	20,2140	21,1232	22,0524	23,0016	13,9708	24,9600
97	16,7334	17,6148	18,4642	19,3336	20,2230	21,1324	22,0618	23,0112	23,9806	24,9700
98	16,7936	17,6232	18,4728	19,3424	20,2320	21,1416	22,0712	23,0208	23,9904	24,9800
99	16,8018	17,6316	18,4814	19,3512	20,2410	21,1508	22,0806	23,0304	24,0002	24,9900

Digitized by Google

N	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
00	25,0000	26,0100	27,0400	28,0900	29,1600	30,2500	31,3600	32,4900	33,6400	34,8100
01	25,0100	26,0202	27,0504	28,1006	29,1708	30,2610	31,3712	32,5014	33,6516	34,8218
02	25,0200	26,0304	27,0608	28,1112	29,1816	30,2720	31,3824	32,5128	33,6632	34,8336
03	25,0300	26,0406	27,0712	28,1218	29,1924	30,2830	31,3936	32,5242	33,6748	34,8454
04	25,0400	26,0508	27,0816	28,1324	29,2032	30,2940	31,4048	32,5356	33,6864	34,8572
05	25,0500	26,0610	27,0920	28,1430	29,2140	30,3050	31,4160	32,5470	33,6980	34,8690
06	25,0600	26,0712	27,1024	28,1536	29,2248	30,3160	31,4272	32,5584	33,7096	34,8808
07	25,0700	26,0814	27,1128	28,1642	29,2356	30,3270	31,4384	32,5698	33,7212	34,8926
08	25,0801	26,0917	27,1233	28,1749	29,2465	30,3381	31,4497	32,5813	33,7329	34,9045
09	25,0901	26,1019	27,1337	28,1855	29,2573	30,3491	31,4609	32,5927	33,7445	34,9167
10	25,1001	26,1121	27,1441	28,1961	29,2681	30,3601	31,4721	32,6041	33,7561	34,9281
11	25,1101	26,1223	27,1545	28,2067	29,2789	30,3711	31,4833	32,6155	33,7677	34,9399
12	25,1201	26,1325	27,1649	28,2173	29,2879	30,3821	31,4945	32,6269	33,7793	34,9517
13	25,1302	26,1428	27,1754	28,2280	29,3006	30,3932	31,5058	32,6384	33,7910	34,9636
14	25,1402	26,1530	27,1858	28,2386	29,3114	30,4042	31,5170	32,6498	33,8026	34,9754
15	25,1502	26,1632	27,1962	28,2492	29,3222	30,4152	31,5282	32,6612	33,8142	34,9872
16	25,1603	26,1735	27,2067	28,2599	29,3331	30,4263	31,5395	32,6727	33,8259	34,9991
17	25,1703	26,1837	27,2171	28,2705	29,3439	30,4373	31,5507	32,6841	33,8375	35,0109
18	25,1803	26,1939	27,2275	28,2811	29,3547	30,4483	31,5619	32,6955	33,8491	35,0227
19	25,1904	26,2042	57,2380	28,2918	29,3656	30,4594	31,5732	32,7070	33,8608	35,0346
20	25,2004	26,2144	27,2484	28,3024	29,3764	30,4704	31,5844	32,7184	33,8724	35,0464
21	25,2104	26,2246	27,2588	28,3130	29,3872	30,4814	31,5956	32,7298	33,8840	35,0582
22	25,2205	26,2349	27,2693	28,3237	29,3981	30,4925	31,6069	32,7412	33,8957	35,0701
23	25,2305	26,2451	27,2797	28,3343	29,4089	30,5035	31,6181	32,7527	33,9073	35,0819
24	25,2406	26,2554	27,2902	28,3450	29,4198	30,5146	31,6294	32,7642	33,9190	35,0938
25	25,2506	26,2656	27,3006	28,3556	29,4306	30,5256	31,6406	32,7756	33,9306	35,1056
26	25,2607	26,2759	27,3171	28,3663	29,4415	30,5367	31,6519	32,7871	33,9423	35,1175
27	25,2707	26,2861	27,3215	28,3769	29,4523	30,5477	31,6631	32,7985	33,9539	35,1293
28	25,2808	26,2964	27,3320	28,3876	29,4632	30,5588	31,6744	32,8100	33,9656	35,1212
29	25,2908	26,3066	27,3424	28,3982	29,4740	30,5698	31,6856	32,8214	33,9772	35,1530
30	25,3009	26,3169	27,3529	28,4089	29,4849	30,5809	31,6969	32,8329	33,9889	35,1649
31	25,3110	26,3272	27,3644	28,4196	29,4958	30,5920	31,7082	32,8444	34,0006	35,1768
32	22,3210	26,3374	27,3738	28,4302	29,5066	30,6030	31,7194	32,8558	34,0122	35,1886
33	25,3311	26,3477	27,3843	28,4409	29,5175	30,6141	31,7307	32,8673	34,0239	35,2005
34	25,3412	26,3580	27,3948	28,4516	29,5284	30,6252	31,7420	32,8788	34,0356	35,2124
35	25,3512	26,3682	27,4052	28,4622	29,5392	30,6362	31,7532	32,8902	34,0472	35,2242
36	25,3613	26,3785	27,4157	28,4729	29,5501	30,6473	31,7645	32,9017	34,0589	35,2361
37	25,3714	26,3888	27,4262	28,4836	29,5610	30,6584	31,7758	32,9132	34,0706	35,2480
38	25,3814	26,3990	27,4366	28,4942	29,5718	30,6694	31,7870	32,9246	34,0822	35,2598
39	25,3915	26,4093	27,4471	28,5049	29,5827	30,6805	31,7982	32,9361	34,0939	35,2717
40	25,4016	26,4196	27,4576	28,5156	29,5936	30,6916	31,8096	32,9476	34,1056	35,2836
41	25,4117	26,4299	27,4681	28,5263	29,6045	30,7027	31,8209	32,9591	34,1173	35,2955
42	25,4218	26,4402	27,4786	28,5370	29,6154	30,7138	31,8322	32,9706	34,1290	35,3074
43	25,4318	26,4504	27,4890	28,5476	29,6262	30,7228	31,8434	32,9820	34,1406	35,3192
44	25,4419	26,4607	27,4995	28,5583	29,6371	30,7359	31,8547	32,9935	34,1523	35,3311
45	25,4520	26,4710	27,5100	28,5690	29,6480	30,7470	31,8660	33,0050	34,1640	35,3430
46	25,4621	26,4813	27,5205	28,5797	29,6589	30,7581	31,8773	33,0165	34,1757	35,3549
47	25,4722	26,4916	27,5310	28,5904	29,6698	30,7692	31,8886	33,0280	34,1874	35,3668
48	25,4823	26,5019	27,5415	28,6011	29,6807	30,7803	31,8999	33,0395	34,1991	35,3787
49	25,4924	26,5122	27,5520	28,6118	29,6916	30,7914	31,9112	33,0510	34,2108	35,3906

Digitized by Google

N	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
50	25,5025	26,5225	27,5625	28,6225	29,7025	30,8025	31,9225	33,0625	34,2225	35,4025
51	25,5126	26,5328	27,5730	28,6332	29,7134	30,8136	31,9338	33,0740	34,2342	35,4144
52	25,5227	26,5431	27,5835	28,6439	29,7243	30,8247	31,9451	33,0855	34,2459	35,4263
53	25,5328	26,5534	27,5940	28,6546	29,7352	30,8358	31,9564	33,0970	34,2576	35,4382
54	25,5429	26,5637	27,6045	28,6653	29,7461	30,8469	31,9677	33,1085	34,2693	35,4501
55	25,5530	26,5740	27,6150	28,6760	29,7570	30,8580	31,9790	33,1200	34,2810	35,4620
56	25,5631	26,5843	27,6255	28,6867	29,7679	30,8691	31,9903	33,1315	34,2927	35,4739
57	25,5732	26,5946	27,6360	28,6974	29,7788	30,8802	32,0016	33,1430	34,3044	35,4858
58	25,5834	26,6050	27,6466	28,7082	29,7898	30,8914	32,0130	33,1546	34,3162	35,4978
59	25,5935	26,6153	27,6571	28,7189	29,8007	30,9025	32,0243	33,1661	34,3279	35,5097
60	25,6036	26,6256	27,6676	28,7296	29,8116	30,9136	32,0356	33,1776	34,3396	35,5216
61	25,6137	26,6359	27,6781	28,7403	29,8225	30,9247	32,0469	33,1891	34,3513	35,5335
62	25,6238	26,6462	27,6886	28,7510	29,8334	30,9358	32,0582	33,2006	34,3630	35,5454
63	25,6340	26,6565	27,6992	28,7618	29,8444	30,9470	32,0696	33,2122	34,3748	35,5574
64	25,6441	26,6669	27,7097	28,7725	29,8553	30,9581	32,0809	33,2237	34,3865	35,5693
65	25,6542	26,6772	27,7202	28,7832	29,8662	30,9692	32,0922	33,2352	34,3982	35,5812
66	25,6644	26,6876	27,7308	28,7940	29,8782	30,9804	32,1036	33,2468	34,4100	35,5932
67	25,6745	26,6979	27,7413	28,8047	29,8881	30,9915	32,1149	33,2583	34,4217	35,6051
68	25,6846	26,7082	27,7518	28,8154	29,8990	31,0026	32,1262	33,2698	34,4334	35,6170
69	25,6948	26,7186	27,7624	28,8262	29,9100	31,0138	32,1376	33,2814	34,4452	35,6290
70	23,7049	26,7289	27,7729	28,8369	29,9209	31,0249	32,1489	33,2929	34,4569	35,6409
71	25,7150	26,7392	27,7834	28,8476	29,9318	31,0 60	32,1602	33,3044	34,4686	35,6528
72	25,7252	26,7496	27,7940	28,8584	29,9428	31,0472	32,1716	33,3160	34,4804	35,6648
73	25,7353	26,7599	27,8045	28,8691	29,9537	31,0583	32,1829	33,3275	34,4921	35,6767
74	25,7455	26,7703	27,8151	28,8799	29,9647	31,0695	32,1943	33,3391	34,5039	35,6887
75	25,7556	26,7806	27,8256	28,8906	29,9756	31,0806	32,2056	33,3506	34,5156	35,7006
76	25,7658	26,7910	27,8362	28,9014	29,9866	31,0918	32,2170	33,3622	34,5 74	35,7126
77	25,7759	26,8013	27,8467	28,9121	29,9975	31,1029	32,2283	33,3737	34,5391	35,7245
78	25,7861	26,8117	27,8573	28,9229	30,0085	31,1141	32,2397	33,3853	34,5509	35,7365
79	25,7962	26,8220	27,8678	28,9336	30,0194	31,1252	32,2510	33,3968	34,5626	35,7484
80	25,8064	26,8324	27,8784	28,9444	30,0304	31,1364	32,2624	33,4084	34,5744	35,7604
81	25,8166	26,8428	27,8890	28,9552	30,0414	31,1476	32,2738	33,4200	34,5862	35,7724
82	25,8267	26,8531	27,8995	28,9659	30,0523	31,1587	32,2851	33,4315	34,5979	35,7843
83	25,8369	26,8635	27,9101	28,9767	30,0633	31,1699	32,2965	33,4431	34,6097	35,7963
84	25,8471	26,8739	27,9207	28,9875	30,0743	31,1811	32,3079	33,4547	34,6215	35,8083
85	25,8572	26,8842	27,9312	28,9982	30,0852	31,1922	32,3192	33,4662	34,6332	35,8202
86	25,8674	26,8946	27,9418	29,0090	30,0962	31,2034	32,3306	33,4778	34,6450	35,8322
87	25,8776	26,9050	27,9524	29,0198	30,1072	31,2146	32,3420	33,4894	34,6568	35,8442
88	25,8877	26,9153	27,9629	29,0305	30,1181	31,2257	32,3533	33,5009	34,6685	35,8561
89	25,8979	26,9257	27,9735	29,0413	30,1291	31,2369	32,3647	33,5125	34,6803	35,8681
90	25,9081	26,9361	27,9841	29,0521	30,1401	31,2481	32,3761	33,5241	34,6921	35,8801
91	25,9183	26,9465	27,9947	29,0629	30,1511	31,2593	32,3875	33,5357	34,7039	35,8921
92	25,9285	26,9569	28,0053	29,0737	30,1621	31,2705	32,3989	33,5473	34,7157	35,9041
93	25,9386	26,9672	28,0158	29,0844	30,1730	31,2816	32,4102	33,5588	34,7274	35,9160
94	25,9488	26,9776	28,0264	29,0952	30,1840	31,2928	32,4216	33,5704	34,7392	35,9280
95	25,9590	26,9880	28,0370	29,1060	30,1950	31,3040	32,4330	33,5820	34,7510	35,9400
96	25,9692	26,9984	28,0476	29,1168	30,2060	31,3152	32,4444	33,5936	34,7628	35,9520
97	25,9794	27,0088	28,0582	29,1276	30,2170	31,3264	32,4558	33,6052	34,7746	35,9640
98	25,9896	27,0192	28,0688	29,1384	30,2280	31,3376	32,4672	33,6168	34,7864	35,9760
99	25,9998	27,0296	28,0794	29,1492	30,2390	31,3488	32,4786	33,6284	34,7982	35,9880

Digitized by Google

N	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
00	36,0000	37,2100	38,4400	39,6900	40,9600	42,2500	43,5600	44,8900	46,2400	47,6100
01	36,0120	37,2222	38,4524	39,7026	40,9728	42,2630	43,5732	44,9034	46,2536	47,6238
02	36,0240	37,2344	38,4648	39,7152	40,9856	42,2760	43,5864	44,9168	46,2672	47,6376
03	36,0360	37,2466	38,4772	39,7278	40,9984	42,2890	43,5996	44,9302	46,2808	47,6514
04	36,0480	37,2588	38,4896	39,7404	41,0112	42,3020	43,6128	44,9436	46,2944	47,6652
05	36,0600	37,2710	38,5020	39,7530	41,0240	42,3150	43,6260	44,9570	46,3080	47,6790
06	36,0720	37,2832	38,5144	39,7656	41,0368	42,3280	43,6392	44,9704	46,3216	47,6928
07	36,0840	37,2954	38,5268	39,7782	41,0496	42,3410	43,6524	44,9838	46,3352	47,7066
08	36,0961	37,3077	38,5393	39,7909	41,0625	42,3541	43,6657	44,9973	46,3489	47,7205
09	36,1081	37,3199	38,5517	39,8035	41,0753	42,3671	43,6789	45,0107	46,3625	47,7343
10	36,1201	37,3321	38,5641	39,8161	41,0881	42,3801	43,6921	45,0241	46,3761	47,7481
11	36,1321	37,3443	38,5765	39,8287	41,1009	42,3931	43,7053	45,0375	46,3897	47,7619
12	36,1441	37,3565	38,5889	39,8413	41,1137	42,4061	43,7185	45,0509	46,4033	47,7757
13	36,1562	37,3688	38,6014	39,8540	41,1266	42,4192	43,7318	45,0644	46,4170	47,7896
14	36,1682	37,3810	38,6138	39,8666	41,1394	42,4322	48,7450	45,0778	46,4306	47,8034
15	36,1802	37,3932	38,6262	39,8792	41,1522	42,4452	43,7582	45,0912	46,4442	47,8172
16	36,1923	37,4055	38,6387	39,8919	41,1651	42,4583	43,7715	45,1047	46,4579	47,8311
17	36,2043	37,4177	38,6511	39,9045	41,1779	42,4713	43,7847	45,1181	46,4715	47,8449
18	36,2163	37,4299	38,6635	39,9171	41,1907	42,4843	43,7979	45,1315	46,4851	47,8587
19	36,2284	37,4422	38,6760	39,9298	41,2036	42,4974	43,8112	45,1450	46,4988	47,8726
20	36,2404	37,4544	38,6884	39,9424	41,2164	42,5104	43,8244	45,1584	46,5124	47,8864
21	36,2524	37,4666	38,7008	39,9550	41,2292	42,5234	43,8376	45,1718	46,5260	47,9002
22	36,2645	37,4789	38,7133	39,9677	41,2421	42,5365	43,8509	45,1853	46,5397	47,9141
23	36,2765	37,4911	38,7257	39,9803	41,2549	42,5495	43,8641	45,1987	46,5533	47,9279
24	36,2886	37,5034	38,7382	39,9930	41,2678	42,5626	43,8794	45,2122	46,5670	47,9418
25	36,3006	37,5156	38,7506	40,0056	41,3806	42,6756	43,8906	45,2256	46,5806	47,9556
26	36,3127	37,5279	38,7631	40,0183	41,2935	42,5887	43,9039	45,2391	46,5943	47,9695
27	36,3247	37,5401	38,7755	40,0309	41,3063	42,6017	43,9171	45,2525	46,6079	47,9833
28	36,3368	37,5524	38,7880	40,0436	41,3192	42,6148	44,9304	45,2660	46,6216	47,9972
29	36,3488	37,5646	38,8004	40,0562	41,3320	42,6278	43,9436	45,2794	46,6352	48,0110
30	36,3609	37,5769	38,8129	40,0689	41,3449	42,6409	43,9569	45,2929	46,6489	48,0249
31	36,3730	37,5892	38,8254	40,0816	41,3578	42,6540	43,9702	45,3064	46,6626	48,0388
32	36,3850	37,6014	38,8378	40,0942	41,3706	42,6670	43,9834	45,3198	46,6762	48,0526
33	36,3971	37,6137	38,8503	40,1069	41,3835	42,6801	43,9967	46,3333	46,6899	48,0663
34	36,4092	37,6260	38,8628	40,1196	41,3964	42,6932	44,0100	45,3468	46,7036	48,0804
35	36,4212	37,6382	38,8752	40,1322	41,4092	42,7062	44,0232	45,3602	46,7172	48,0942
36	36,4333	37,6505	38,8877	40,1449	41,4221	42,7193	44,0365	45,3737	46,7309	48,1081
37	36,4454	37,6628	38,9002	40,1576	41,4350	42,7324	44,0498	45,3872	46,7446	48,1220
38	36,4574	37,6750	38,9126	40,1702	41,4478	42,7454	44,0630	45,4006	46,7582	48,1358
39	36,4695	37,6873	38,9251	40,1829	41,4607	42,7585	44,0763	45,4141	46,7719	48,1497
40	36,4816	37,6996	38,9376	40,1956	41,4736	42,7716	44,0896	45,4276	46,7856	48,1636
41	36,4937	37,7119	38,9501	40,2083	41,4865	42,7847	44,1029	45,4411	46,7993	48,1775
42	36,5058	37,7242	38,9626	40,2210	41,4994	42,7978	44,1162	45,4546	46,8130	48,1914
43	36,5178	37,7364	38,9750	40,2336	41,5122	42,8108	44,1294	45,4680	46,8266	48,2052
44	36,5299	37,7487	38,9875	40,2463	41,5251	42,8239	44,1427	45,4815	46,8403	48,2192
45	36,5420	37,7610	39,0000	40,2590	41,5380	42,8370	44,1560	45,4950	46,8540	48,2330
46	36,5541	37,7733	39,0125	40,2717	41,5509	42,8501	44,1693	45,5085	46,8677	48,2469
47	36,5662	37,7856	39,0250	40,2844	41,5638	42,8632	44,1826	45,5220	46,8814	48 2608
48	36,5783	37,7979	39,0375	40,2971	41,5767	42,8763	44,1959	45,5355	46,8951	48,2747
49	36,5904	37,8102	39,0500	40,3098	41,5896	42,8894	44,2092	46,5490	46,9088	48,2886

Digitized by Google

N	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
50	36,6025	37,8225	39,0623	40,3225	41,6025	42,9025	44,2225	45,5625	46,9225	48,3025
51	36,6146	37,8348	39,0750	40,3352	41,6154	42,9156	44,2358	45,5760	46,9362	48,3164
52	36,6267	37,8471	39,0875	40,3479	41,6283	42,9287	44,2491	45,5895	46,9499	48,3303
53	36,6388	37,8594	39,1000	40,3606	41,6412	42,9418	44,2624	45,6030	46,9636	48,3442
54	36,6509	37,8717	39,1125	40,3733	41,6541	42,9549	44,2757	45,6165	46,9773	48,3581
55	36,6630	37,8840	39,1250	40,3860	41,6670	42,9680	44,2890	45,6300	46,9910	48,3720
56	36,6751	37,8963	39,1375	40,3987	41,6799	42,9811	44,3023	45,6435	47,0047	48,3859
57	36,6872	37,9086	39,1500	40,4114	41,6928	42,9942	44,3156	45,6570	47,0184	48,3998
58	36,6994	37,9210	39,1626	40,4242	41,7058	43,0074	44,3290	45,6706	47,0322	48,4138
59	36,7115	37,9333	39,1751	40,4369	41,7187	43,0205	44,3423	45,6841	47,0459	48,4277
60	36,7236	37,9456	39,1876	40,4496	41,7316	43,0336	44,3556	45,6976	47,0596	48,4416
61	36,7357	37,9579	39,2001	40,4623	41,7445	43,0467	44,3689	45,7111	47,0733	48,4555
62	36,7478	37,9702	39,2126	40,4750	41,7574	43,0598	44,3822	45,6246	47,0870	48,4694
63	36,7600	37,9826	39,2252	40,4878	41,7704	43,0730	44,3956	45,7382	47,1008	48,4834
64	36,7721	37,9949	39,2377	40,5005	41,7833	43,0861	44,4089	45,7517	47,1145	48,4973
65	36,7842	38,0072	39,2502	40,5132	41,7962	43,0992	44,4222	45,7652	47,1282	48,5112
66	36,7964	38,0196	39,2628	40,5260	41,8092	43,1124	44,4356	45,7788	47,1420	48,5252
67	36,8085	38,0319	39,2753	40,5387	41,8221	43,1255	44,4489	45,7923	47,1557	48,5391
68	36,8206	38,0442	39,2878	40,5514	41,8350	43,1386	44,4622	45,8058	47,1694	48,5530
69	36,8328	38,0566	39,3004	40,5642	41,8480	43,1518	44,4756	45,8194	47,1832	48,5670
70	36,8449	38,0689	39,3129	40,5769	41,8609	43,1649	44,4889	45,8329	47,1969	48,5809
71	36,8570	38,0812	39,3254	40,5896	41,8738	43,1780	44,5022	45,8464	47,2106	48,5948
72	36,8692	38,0936	39,3380	40,6024	41,8868	43,1912	44,5156	45,8600	47,2244	48,6088
73	36,8813	38,1059	39,3505	40,6151	41,8997	43,2043	44,5289	45,8735	47,2381	48,6227
74	36,8935	38,1183	39,3631	40,6279	41,9127	43,2175	44,5423	45,8871	47,2519	48,6367
75	36,9056	38,1306	39,3756	40,6406	41,9256	43,2306	44,5556	45,9006	47,2656	48,6506
76	36,9178	38,1430	39,3882	40,6534	41,9386	43,2438	44,5690	45,9142	47,2794	48,6646
77	36,9299	38,1553	39,4007	40,6661	41,9515	43,2569	44,5823	45,9277	47,2931	48,6785
78	36,9421	38,1677	39,4133	40,6789	41,9645	43,2701	44,5957	45,9413	47,3069	48,6925
79	36,9542	38,1800	39,4258	40,6916	41,9774	43,2832	44,6090	45,9548	47,3206	48,7064
80	36,9664	38,1924	39,4384	40,7044	41,9904	43,2964	44,6224	45,9684	47,3344	48,7204
81	36,9786	38,2048	39,4510	40,7177	42,0034	43,3096	44,6358	45,9820	47,3482	48,7344
82	36,9907	38,2171	39,4635	40,7299	42,0163	43,3227	44,6491	46,0955	47,3619	48,7483
83	37,0029	38,2295	39,4761	40,7427	42,0293	43,3359	44,6625	46,0091	47,3757	48,7623
84	37,0151	38,2419	39,4887	40,7555	42,0423	43,3491	44,6759	46,0227	47,3895	48,7763
85	37,0272	38,2542	39,5012	40,7682	42,0552	43,3622	44,6892	46,0362	47,4032	48,7902
86	37,0394	38,2666	39,5138	40,7810	42,0682	43,3754	44,7026	46,0498	47,4170	48,8042
87	37,0516	38,2790	39,5264	40,7938	42,0812	43,3886	44,7160	46,0634	47,4308	48,8182
88	37,0637	38,2913	39,5389	40,8065	42,0941	43,4017	44,7293	46,0769	47,4445	48,8321
89	37,0759	38,3037	39,5515	40,8193	42,1071	43,4149	44,7427	46,0905	47,4583	48,8461
90	37,0881	38,3161	39,5641	40,8321	42,1201	43,4281	44,7561	46,1041	47,4721	48,8601
91	37,1003	38,3285	39,5767	40,8449	42,1331	43,4413	44,7695	46,1177	47,4859	48,8741
92	37,1125	38,3409	39,5893	40,8577	42,1461	43,4545	44,7829	46,1313	47,4997	48,8881
93	37,1246	38,3532	39,6018	40,8704	42,1590	43,4676	44,7962	46,1448	47,5134	48,9020
94	37,1368	38,3656	39,6144	40,8832	42,1720	43,4808	44,8096	46,1584	47,5272	48,9160
95	37,1490	38,3780	39,6270	40,8960	42,1850	43,4940	44,8230	46,1720	47,5410	48,9300
96	37,1612	38,3904	39,6396	40,9088	42,1980	43,5072	44,8364	46,1856	47,5548	48,9440
97	37,1734	38,4028	39,6522	40,9216	42,2110	43,5204	44,8498	46,1992	47,5686	48,9580
98	37,1856	38,4152	39,6648	40,9344	42,2240	43,5336	44,8632	46,2128	47,5824	48,9720
99	37,1978	38,4276	39,6774	40,9472	42,2370	43,5468	44,8766	46,2242	47,5962	48,9860

Digitized by Google

N	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
00	49,0000	50,4100	51,8400	53,2900	54,7600	56,2500	57,7600	59,2900	60,8400	62,4100
01	49,0140	50,4242	51,8544	53,3046	54,7748	56,2650	57,7752	59,3054	60,8556	62,4258
02	49,0280	50,4384	51,8688	53,3192	54,7896	56,2800	57,7904	59,3208	60,8712	62,4416
03	49,0420	50,4526	51,8832	53,3338	54,8044	36,2950	57,8056	59,3362	60,8868	62,4574
04	49,0560	50,4668	51,8976	53,3484	54,8192	56,3100	57,8208	59,3516	60,9024	62,4732
05	49,0700	50,4810	51,9120	53,3630	54,8340	56,3250	57,8360	59,3670	60,9180	62,4890
06	49,0840	50,4952	51,9264	53,3776	54,8488	56,3400	57,8512	59,3824	60,9336	62,5048
07	49,0980	50,5094	51,9408	53,3922	54,8636	56,3550	57,8664	59,3978	60,9492	62,5206
08	49,1121	50,5237	51,9553	53,4069	64,8785	56,3701	57,8817	59,4133	60,9649	62,5365
09	49,1261	50,5379	51,9697	53,4215	54,8933	56,3851	57,8969	59,4287	60,9805	62,5523
10	49,1407	50,5521	51,9841	53,4361	54,9081	56,4001	57,9121	59,4441	60,9961	62,5681
11	49,1541	50,5663	51,9985	53,4507	54,9229	56,4151	57,9273	59,4595	61,0117	62,5839
12	49,1681	50,5805	52,0129	53,4653	54,9377	56,4301	57,9425	59,4749	61,0273	62,5997
13	49,1822	50,5948	52,0274	53,4800	54,9526	56,4452	57,9578	59,4904	61,0430	62,6156
14	49,1962	50,6090	52,0418	53,4946	54,9674	56,4602	57,9730	59,5058	61,0586	62,6314
15	49,2102	50,6232	52,0562	53,5092	54,9822	56,4752	57,9882	59,5212	61,0742	62,6472
16	49,2243	50,6375	52,0707	53,5239	54,9971	56,4903	58,0035	59,5367	61,0899	62,6631
17	49,2383	50,6517	52,0851	53,5385	55,0119	56,5053	58,0187	59,5521	61,1055	62,6789
18	49,2523	50,6659	52,0995	53,5531	55,0267	56,5203	58,0339	59,5675	61,1211	62,6947
19	49,2664	50,6802	52,1140	53,5678	55,0416	56,5354	58,0492	59,5830	61,1368	62,7106
20	49,2804	50,6944	52,1284	53,5824	55,0564	56,5504	58,0644	59,5984	61,1524	62,7264
21	49,2944	50,7086	52,1428	53,5970	55,0712	56,5654	58,0796	59,6138	61,1680	62,7422
22	49,3085	50,7229	52,1573	53,6117	55,0861	56,5805	58,0949	59,6293	61,1837	62,7581
23	49,3225	50,7371	52,1717	53,6263	55,1009	56,5955	58,1101	59,6447	61,1993	62,7739
24	49,3366	50,7514	52,1862	53,6410	55,1158	56,6106	58,1254	59,6602	61,2150	62,7898
25	49,3506	50,7656	52,2006	53,6556	55,1306	56,6256	58,1406	59,6756	61,2306	62,8056
26	49,3647	50,7799	52,2751	53,6703	55,1455	56,6407	58,1559	59,6911	61,2463	62,8215
27	49,3787	50,7941	52,2295	53,6849	55,1603	56,6557	58,1711	59,7065	61,2619	62,8373
28	49,3928	50,8084	52,2440	53,6996	55,1752	56,6708	58,1864	59,7220	61,2776	62,8532
29	49,4068	50,8226	52,2584	53,7142	55,1900	56,6858	58,2016	59,7374	61,2932	62,8690
30	49,4209	50,8369	52,2729	53,7289	55,2049	56,7009	58,2169	59,7529	61,3089	62,8849
31	49,4350	50,8512	52,2874	53,7436	55,2198	56,7160	58,2322	59,7684	61,3246	62,9008
32	49,4490	50,8654	52,3018	53,7582	55,2346	56,7310	58,2474	59,7838	61,3402	62,9166
33	49,4631	50,8797	52,3163	53,7729	55,2495	56,7461	58,2627	59,7993	61,3559	62,9325
34	49,4772	50,8940	52,3308	53,7876	55,2644	56,7612	58,2780	59,8148	61,3716	62,9484
35	49,4912	50,9082	52,3452	53,8022	55,2792	56,7762	58,2932	59,8302	61,3872	62,9642
36	49,5053	50,9225	52,3597	53,8169	55,2941	56,7913	58,3085	59,8457	61,4029	62,9801
37	49,5194	50,9368	52,3742	53,8316	55,3090	56,8064	58,3238	59,8612	61,4186	62,9960
38	49,5334	50,9510	52,3886	53,8462	55,3238	56,8214	58,3390	59,8766	61,4342	63,0118
39	49,5475	50,9653	52,4031	53,8609	55,3387	56,8365	58,3543	59,8921	61,4499	63,0277
40	49,5616	50,9796	52,4176	53,8756	55,3536	56,8516	58,3696	59,9076	61,4656	63,0436
41	49,5757	50,9939	52,4321	53,8903	55,3685	56,8667	58,3849	59,9231	61,4813	63,0595
42	49,5898	51,0082	52,4466	53,9050	55,3834	56,8818	58,4002	59,9386	61,4970	63,0754
43	49,6038	51,0224	52,4610	53,9196	55,3982	56,8968	58,4154	59,9540	61,5126	63,0912
44	49,6179	51,0367	52,4755	53,9343	55,4131	56,9119	58,4307	59,9695	61,5283	63,1071
45	49,6320	51,0510	52,4900	53,9490	55,4280	56,9270	58,4460	59,9850	61,5140	63,1230
46	49,6461	51,0653	52,5045	53,9637	55,4429	56,9421	58,4613	60,0005	61,5397	63,1389
47	49,6602	51,0796	52,5190	53,9784	55,4578	56,9572	58,4766	60,0160	61,5754	63,1548
48	49,6743	51,0939	52,5335	53,9931	55,4727	56,9723	58,4919	60,0315	61,5911	63,1707
49	49,6884	51,1082	52,5480	54,0078	55,4876	56,9874	58,5072	60,0470	61,6068	63,1866

Digitized by Google

N	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
50	49,7025	51,1225	52,5625	54,0225	55,5025	57,0025	58,5225	60,0625	61,6225	63,2025
51	49,7166	51,1368	52,5770	54,0372	55,5174	57,0176	58,5378	60,0780	61,6382	63,2184
52	49,7307	51,1511	52,5915	54,0519	55,5323	57,0327	58,5531	60,0935	61,6539	63,2343
53	49,7448	51,1654	52,6060	54,0666	55,5472	57,0478	58,5684	60,1090	61,6696	63,2502
54	49,7589	51,1797	52,6205	54,0813	55,5621	57,0629	58,5837	60,1245	61,6853	63,2661
55	49,7730	51,1940	52,6350	54,0960	55,5770	57,0780	58,5990	60,1400	61,7010	63,2820
56	49,7871	51,2083	52,6495	54,1107	55,5919	57,0931	58,6143	60,1555	61,7167	63,2979
57	49,8012	51,2226	52,6640	54,1254	55,6068	57,1082	58,6296	60,1710	61,7324	63,3138
58	49,8154	51,2370	52,6786	54,1402	55,6218	57,1234	58,6450	60,1866	61,7482	63,3298
59	49,8295	51,2513	52,6931	54,1549	55,6367	57,1385	58,6603	60,2021	61,7639	63,3457
60	49,8436	51,2656	52,7076	54,1696	55,6516	57,1536	58,6756	60,2176	61,7796	63,3616
61	49,8577	51,2799	52,7221	54,1843	55,6665	57,1687	58,6909	60,2331	61,7953	63,3775
62	49,8718	51,2942	52,7366	54,1990	55,6814	57,1838	58,7062	60,2486	61,8110	63,3934
63	49,8860	51,3086	52,7512	54,2138	55,6964	57,1990	58,7216	60,2642	61,8268	63,4094
64	49,9001	51,3229	52,7657	54,2285	55,7113	57,2141	58,7369	60,2797	61,8425	63,4253
65	49,9142	51,3373	52,7802	54,2432	55,7262	57,2292	58,7522	60,2952	61,8582	63,4412
66	49,9284	51,3516	52,7948	54,2580	55,7412	57,2444	58,7676	60,3108	61,8740	63,4572
67	49,9425	51,3659	52,8093	54,2727	55,7561	57,2595	58,7829	60,3263	61,8897	63,4731
68	49,9566	51,3802	52,8238	54,2874	55,7710	57,2746	58,7982	60,3418	61,9054	63,4890
69	49,9708	51,3946	52,8384	54,3022	55,7860	57,2898	58,8136	60,3574	61,9212	63,5050
70	49,9849	51,4089	52,8529	54,3169	55,8009	57,3049	58,8289	60,3729	61,9369	63,5209
71	49,9990	51,4232	52,8674	54,3316	55,8158	57,3200	58,8442	60,3884	61,9526	63,4368
72	50,0132	51,4376	52,8820	54,3464	55,8308	57,3352	58,8596	60,4040	61,9684	63,5528
73	50,0273	51,4519	52,8965	54,3611	55,8457	57,3503	58,8749	60,4195	61,9841	63,5687
74	50,0415	51,4663	52,9111	54,3759	55,8607	57,3655	58,8903	60,4351	61,9999	63,5847
75	50,0556	51,4806	52,9256	54,3901	55,8756	57,3806	58,9056	60,4506	62,0156	63,6006
76	50,0698	51,4950	52,9402	54,4054	55,8906	57,3958	58,9210	60,4662	62,0314	63,6166
77	50,0839	51,5093	52,9547	54,4201	55,9055	57,4109	58,9363	60,4817	62,0471	63,6324
78	50,0981	51,5237	52,9693	54,4349	55,9205	57,4261	58,9517	60,4973	62,0629	63,6485
79	50,1122	51,5380	52,9838	54,4496	55,9354	57,4412	58,9670	60,5128	62,0786	63,6644
80	50,1264	51,5524	52,9984	54,4644	55,9504	57,4564	58,9824	60,5284	62,0944	63,6804
81	50,1406	51,5668	53,0130	54,4792	55,9654	57,4716	58,9978	60,5440	62,1102	63,6964
82	50,1547	51,5811	53,0275	54,4939	55,9803	57,4867	59,0131	60,5595	62,1259	63,7123
83	50,1689	51,5955	53,0421	54,5087	55,9953	57,5019	59,0285	60,5751	62,1417	63,7283
84	50,1831	51,6099	53,0567	54,5233	56,0103	57,5171	59,0439	60,5907	62,1575	63,7443
85	50,1972	51,6242	53,0712	54,5382	56,0252	57,5322	59,0592	60,6062	62,1732	63,7602
86	50,2114	51,6386	53,0858	54,5530	56,0402	57,5474	59,0746	60,6218	62,1890	63,7762
87	50,2256	51,6530	53,1004	54,5678	56,0552	57,5626	59,0900	60,6374	62,2048	63,7922
88	50,2397	51,6673	53,1149	54,5825	56,0701	57,5777	59,1053	60,6529	62,2205	63,8081
89	50,2539	51,6817	53,1295	54,5973	56,0851	57,5929	59,1207	60,6685	62,2363	63,8241
90	50,2681	51,6961	53,1441	54,6121	56,1001	57,6081	59,1361	60,6841	62,2521	63,8401
91	50,2823	51,7105	53,1587	54,6269	56,1151	57,6233	59,1515	60,6997	62,2679	63,8561
92	50,2965	51,7249	53,1733	54,6417	56,1301	57,6385	59,1669	60,7153	62,2837	63,8721
93	50,3106	51,7392	53,1878	54,6564	56,1450	57,6536	59,1822	60,7308	62,2994	63,8880
94	50,3248	51,7536	53,2024	54,6712	56,1600	57,6688	59,1976	60,7464	62,3152	63,9040
95	50,3390	51,7680	53,2170	54,6860	56,1750	57,6840	59,2130	60,7620	62,3310	63,9200
96	50,3532	51,7824	53,2316	54,7008	56,1900	57,6992	59,2284	60,7776	62,3468	63,9360
97	50,3674	51,7968	53,2462	54,7156	56,2050	57,7144	59,2438	60,7932	62,3626	63,9520
98	50,3816	51,8112	53,2609	54,7304	56,2200	57,7296	59,2592	60,8088	62,3784	63,9680
99	50,3958	51,8256	53,2754	54,7425	56,2350	57,7448	59,2746	60,8244	62,3942	63,9840

Digitized by Google

N	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
00	64,0000	65,6100	67,2400	68,8900	70,5600	72,2500	73,9600	75,6900	77,4400	79,2100
01	64,0160	65,6262	67,2564	68,9066	70,5768	72,2670	73,9772	75,7074	77,4576	79,2278
02	64,0320	65,6424	67,2728	68,9232	70,5936	72,2840	73,9944	75,7248	77,4752	79,2456
03	64,0480	65,6586	67,2892	68,9398	70,6104	72,3010	74,0116	75,7422	77,4928	79,2634
04	64,0640	65,6748	67,3056	68,9564	70,6272	72,3180	74,0288	75,7596	77,5104	79,2812
05	64,0800	65,6910	67,3220	68,9730	70,6440	72,3350	74,0460	75,7770	77,5280	79,2990
06	64,0960	95,7072	67,3384	68,9896	70,6608	72,3520	74,0632	75,7944	77,5456	79,3168
07	64,1120	65,7234	67,3548	69,0062	70,6776	72,3690	74,0804	75,8118	77,5632	79,3346
08	64,1281	65,7397	67,3713	69,0229	70,6945	72,3861	74,0977	75,8293	77,5809	79,3525
09	64,1441	65,7559	67,3877	69,0395	70,7113	72,4031	74,1149	75,8467	77,5985	79,3703
10	64,1601	65,7721	67,4041	69,0561	70,7281	72,4201	74,1321	75,8641	77,6161	79,3881
11	64,1761	65,7883	67,4205	69,0727	70,7449	72,4371	74,1493	75,8815	77,6337	79,4059
12	64,1921	65,8045	67,4369	69,0893	70,7617	72,4541	74,1665	75,8989	77,6513	79,4237
13	64,2082	65,8208	67,4534	69,1060	70,7786	72,4712	74,1838	75,9164	77,6690	79,4416
14	64,2242	65,8370	67,4698	69,1226	70,7954	72,4882	74,2010	75,9338	77,6866	79,4594
15	64,2402	65,8532	67,4862	69,1392	70,8122	72,5052	74,2182	75,9512	77,7042	79,4772
16	64,2563	65,8695	67,5027	69,1559	70,8291	72,5223	74,2355	75,9687	77,7219	76,4951
17	64,2723	65,8857	67,5191	66,1725	70,8459	72,5393	74,2527	75,9861	77,7395	79,5129
18	64,2883	65,9019	67,5355	69,1891	70,8627	72,5563	74,2699	76,0035	77,7571	79,5307
19	64,3044	65,9182	67,5520	69,2058	70,8796	72,5734	74,2872	76,0210	77,7748	79,5486
20	64,3204	65,9344	67,5684	69,2224	70,8964	72,5904	74,3044	76,0384	77,7924	79,5664
21	64,3364	65,9504	67,5848	69,2390	70,9132	72,6074	74,3216	76,0558	77,8100	79,5842
22	64,3525	65,9669	67,6013	69,2557	70,9301	72,6245	74,3389	76,0733	77,8277	79,6021
23	64,3685	65,9831	67,6177	69,2723	70,9469	72,6415	74,3561	76,0907	77,8453	79,6199
24	64,3846	65,9994	67,6342	69,2890	70,9638	72,6586	74,3734	76,1082	77,8630	79,6378
25	64,4006	66,0156	67,6506	99,3056	70,9806	72,6756	74,3906	76,1256	77,8806	79,6556
26	64,4167	66,0319	67,6671	69,3223	70,9975	72,6927	74,4079	76,1431	77,8983	79,6735
27	64,4327	66,0481	67,6835	69,3389	71,0143	72,7097	74,4251	76,1605	77,9159	79,6913
28	64,4488	66,0644	67,7000	69,3556	71,0312	72,7268	74,4424	76,1780	77,9336	79,7092
29	64,4648	66,0806	67,7164	69,3722	71,0480	72,7438	74,4596	76,1954	77,9512	79,7270
30	64,4809	66,0969	67,7329	69,3889	71,0649	72,7609	74,4769	76,2129	77,9689	79,7449
31	64,4970	66,1132	67,7494	69,4056	71,0818	72,7780	74,4942	76,2304	77,9866	79,7628
32	64,5130	66,1294	67,7658	69,4222	71,0986	72,7950	74,5114	76,2478	78,0042	79,7806
33	64,5291	66,1457	67,7823	69,4389	71,1155	72,8121	74,5287	76,2653	78,0219	79,7985
34	64,5452	66,1620	67,7988	69,4556	71,1324	72,8292	74,5460	76,2828	75,0396	79,8164
35	64,5612	66,1782	67,8152	69,4722	71,1492	72,8462	74,5632	76,3002	78,0572	79,8342
36	64,5773	66,1945	67,8317	69,4889	71,1661	72,8633	74,5805	76,3177	78,0749	79,8521
37	64,5934	66,2108	67,8482	69,5056	71,1830	72,8804	74,5978	76,3352	78,0926	79,8700
38	64,6094	66,2270	67,8646	69,5222	71,1998	72,8974	74,6150	76,3526	78,1102	79,8878
39	64,6255	66,2433	67,8811	69,5389	71,2167	72,9145	74,6323	76,3701	78,1279	79,9057
40	64,6416	66,2596	67,8976	69,5556	71,2336	72,9316	74,6496	76,3876	78,1456	79,9236
41	64,6577	66,2759	67,9171	69,5723	71,2505	72,9487	74,6669	76,4051	78,1633	79,9415
42	64,6738	66,2922	67,9306	69,5890	71,2674	72,9658	74,6842	76,4226	78,1810	79,9594
43	64,6898	66,3084	67,9470	69,6056	71,2842	72,9828	74,7014	76,4400	78,1986	79,9772
44	64,7059	66,3247	67,9635	69,6223	71,3011	73,9999	74,7187	76,4575	78,2163	79,9951
45	64,7220	66,3410	67,9800	69,6390	71,3180	73,0170	74,7360	76,4750	78,2340	80,0130
46	64,7381	66,3573	67,9965	69,6557	71,3349	73,0341	74,7533	76,4925	78,2517	80,0309
47	64,7542	66,3736	68,0130	69,6724	71,3518	73,0512	74,7706	76,5100	78,2694	80,0488
48	64,7703	65,3899	68,0295	69,6891	71,3687	73,0683	74,7879	76,5275	78,2871	80,0667
49	64,7864	66,4062	68,0460	69,7058	71,3856	73,0854	74,8052	76,5450	78,3048	80,0846

Digitized by Google

N	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
50	64,8025	66,4225	68,0625	69,7225	71,4025	73,1025	74,8224	76,5625	78,3225	80,1025
51	64,8186	66,4388	68,0790	69,7392	71,4194	73,1196	74,8398	76,5800	78,3402	80,1204
52	64,8347	66,4551	68,0955	69,7559	71,4363	73,1367	74,8571	76,5975	78,3579	80,1383
53	64,8508	66,4614	68,1120	69,7726	71,4532	73,1538	74,8744	76,6150	78,3756	80,1562
54	64,8669	66,4877	68,1285	69,7893	71,4701	73,1709	74,8917	76,6325	78,3933	80,1741
55	64,8830	66,5040	68,1450	69,8060	71,4870	73,1880	74,9090	76,6500	78,4110	80,1920
56	64,8991	66,5203	68,1615	69,8227	71,5039	73,2051	74,9263	76,6675	78,4287	80,2099
57	64,9152	66,5366	68,1780	69,8394	71,5208	73,2222	74,9436	76,6850	78,4464	80,2278
58	64,9314	66,5530	68,1946	69,8562	71,5378	73,2394	74,9610	76,7026	78,4642	80,2458
59	64,9475	66,5693	68,2111	69,8729	71,5547	73,2565	74,9783	76,7201	78,4819	80,2637
60	64,9636	66,5856	68,2276	69,8896	71,5716	73,2736	74,9956	76,7376	79,4996	80,2816
61	64,9797	66,6019	68,2441	69,9063	71,5885	73,2907	75,0129	76,7551	78,5173	80,2995
62	64,9958	66,6182	68,2606	69,9230	71,6054	73,3078	75,0302	76,7726	78,5350	80,3174
63	65,0120	66,6346	68,2772	69,9398	71,6224	73,3250	75,0476	76,7902	78,5528	80,3354
64	65,0280	66,6509	68,2937	69,9565	71,6393	73,3421	75,0649	76,8077	78,5705	80,3533
65	65,0442	66,6672	68,3102	69,9732	71,6562	73,3592	75,0822	76,8252	78,5882	80,3712
66	65,0604	66,6836	68,3268	69,9900	71,6732	73,3764	75,0996	76,8428	78,6060	80,3892
67	65,0765	66,6999	68,3433	70,0067	11,6901	73,3935	75,1169	76,8603	78,6237	80,4071
68	65,0926	66,7162	68,3598	70,0234	71,7070	73,4106	75,1342	76,8778	78,6414	80,4250
69	65,1088	66,7326	68,3764	70,0402	71,7244	73,4278	75,1516	76,8954	78,6592	80,4430
70	65,1249	66,7489	68,3929	70,0569	71,7409	73,4449	75,1689	76,9129	78,6769	80,4609
71	65,1410	66,7652	68,4064	70,0736	71,7578	73,4620	75,1862	76,9304	78,6946	80,4788
72	65,1572	66,7816	68,4260	70,0904	71,7748	73,4792	75,2036	76,9480	78,7124	80,4968
73	65,1733	66,7979	68,4425	70,1071	71,7917	73,4963	75,2209	76,9655	78,7301	80,5147
74	65,1895	66,8143	68,4591	70,1239	71,8087	73,5135	75,2383	76,9831	78,7479	80,5327
75	65,2056	66,8306	68,4756	70,1406	71,8256	73,5306	75,2556	77,0006	78,7656	80,5506
76	65,2218	66,8470	68,4922	70,1574	71,8426	73,5478	75,2730	77,0182	78,7834	80,5686
77	65,2379	66,8633	68,5087	70,1741	71,8595	73,5649	75,2903	77,0357	78,8011	80,5865
78	65,2541	66,8797	68,5253	70,1909	71,8763	73,5821	75,3077	77,0533	78,8189	80,6045
79	65,2702	66,8960	68,5418	70,2076	71,8934	73,5992	75,3250	77,0708	78,8366	80,6224
80	65,2864	66,9124	68,5584	70,2244	71,9104	73,6164	75,3424	77,0884	78,8544	80,6404
81	65,3026	66,9288	68,5750	70,2412	71,9274	73,6336	75,3598	77,1060	78,8722	80,6584
82	65,3187	66,9451	68,5915	70,2579	71,9443	73,6507	75,3771	77,1235	78,8899	80,6763
83	65,3349	66,9615	68,6081	70,2747	71,9613	73,6679	75,3945	77,1411	78,9077	80,6943
84	65,3511	66,9779	68,6247	70,2915	71,9783	73,6851	75,4119	77,1587	78,9255	80,7123
85	65,3672	66,9942	68,6412	70,3082	71,9952	73,7022	75,4292	77,1762	78,9432	80,7302
86	65,3834	67,0106	68,6578	70,3250	72,0122	73,7194	75,4466	77,1938	78,9610	80,7482
87	65,3996	67,0270	68,6744	70,3418	72,0292	73,7366	75,4640	77,2114	78,9788	80,7662
88	65,4157	67,0433	68,6909	70,3585	72,0461	73,7537	75,4813	77,2289	78,9965	80,7841
89	65,4319	67,0597	68,7075	70,3753	72,0631	73,7709	75,4987	77,2465	79,0143	80,8021
90	65,4481	67,0761	68,7241	70,3921	72,0801	73,7881	75,5161	77,2641	79,0321	80,8201
91	65,4643	67,0925	68,7407	70,4089	72,0971	73,8053	75,5335	77,2817	79,0499	80,8381
92	65,4805	67,1089	68,7573	70,4257	72,1141	73,8225	75,5509	77,2992	79,0677	80,8561
93	65,4966	67,1252	68,7738	70,4424	72,1310	73,8396	75,5682	77,3168	79,0854	80,8740
94	65,5128	67,1416	68,7904	70,4592	72,1480	73,8568	75,5856	77,3344	79,1032	80,8920
95	65,5290	67,1580	68,8070	70,4760	72,1650	73,8740	75,6030	77,3520	79,1210	80,9100
96	65,5452	67,1744	68,8236	70,4928	72,1820	73,8912	75,6204	77,3696	79,1388	80,9280
97	65,5614	67,1908	68,8402	70,5096	72,1990	73,9084	75,6378	77,3872	79,1566	80,9460
98	65,5776	67,2072	68,8568	70,5264	72,2060	73,9256	75,6552	77,4048	79,1744	80,9640
99	65,5938	67,2236	68,8734	70,5432	72,2330	73,9428	75,6726	77,4224	79,1922	80,9820

Digitized by Google

N	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
00	81,0000	82,8100	84,6400	86,4900	88,3600	80,2500	92,1600	94,0900	96,0400	98,0100
01	81,0180	82,8282	84,6584	86,5086	88,3788	90,2690	92,1792	94,1094	96,0596	98,0298
02	81,0360	82,8464	84,6768	86,5272	88,3976	90,2880	92,1984	94,1288	96,0792	98,0496
03	81,0540	82,8646	84,6952	86,5458	88,4164	90,3070	92,2176	94,1482	96,0988	98,0694
04	81,0720	82,8828	84,7136	86,5644	88,4352	90,3260	92,2368	94,1676	96,1184	98,0892
05	81,0900	82,9010	84,7320	86,5830	88,4540	90,3450	92,2560	94,1870	96,1380	98,1090
06	81,1080	82,9192	84,7504	86,6016	88,4728	90,3640	92,2752	94,2064	96,1576	98,1288
07	81,1260	82,9374	84,7688	86,6202	88,4916	90,3830	62,2944	94,2258	96,1772	98,1486
08	81,1441	82,9557	84,7873	86,6389	88,5105	90,4021	92,3137	94,2453	96,1969	98,1685
09	81,1621	82,9739	84,8057	86,6575	88,5293	90,4211	92,3329	94,2647	96,2165	98,1883
10	81,1801	82,9921	84,8241	86,6761	88,5481	90,4401	92,3521	94,2841	96,2361	98,2081
11	81,1981	83,0103	84,8425	86,6947	88,5669	90,4591	92,3713	94,3035	96,2557	98,2279
12	81,2161	83,0285	84,8609	86,7133	88,5857	90,4781	92,3905	94,3229	96,2753	98,2477
13	81,2342	83,0468	84,8794	86,7320	88,6046	90,4972	92,4098	94,3424	96,2950	98,2676
14	81,2522	83,0650	84,8978	86,7506	88,6234	90,5162	92,4290	94,3618	96,3146	98,2874
15	81,2702	83,0832	84,9162	86,7692	88,6422	90,5352	92,4482	94,3812	96,3342	98,3077
16	81,2883	83,1015	84,9347	86,7879	88,6611	90,5543	92,4675	94,4007	96,3539	98,3271
17	81,3063	83,1197	84,9531	86,8065	88,6799	90,5733	92,4867	94,4201	96,3735	98,3469
18	81,3243	83,1379	84,9715	86,8251	88,6987	90,5923	92,5059	94,4395	96,3931	98,3667
19	81,3424	83,1562	84,9900	86,8438	88,7176	90,6114	92,5252	94,4590	96,4128	98,3866
20	81,3604	83,1744	85,0084	86,8624	88,7364	90,6304	92,5444	94,4784	96,4324	98,4064
21	81,3784	83,1926	85,0268	86,8810	88,7552	90,6494	92,5636	94,4978	96,4520	98,4262
22	81,3965	83,2109	85,0453	86,8997	88,7741	90,6685	92,5829	94,5173	96,4717	98,4461
23	81,4145	83,2291	85,0637	86,9183	88,7529	90,6875	92,6021	94,5367	96,4913	98,4659
24	81,4326	83,2474	85,0822	86,9370	88,8118	90,7066	92,6214	94,5562	96,5110	98,4858
25	81,4506	83,2656	85,1006	86,9556	88,8306	90,7256	92,6406	94,5756	96,5306	98,5056
26	81,4687	83,2839	85,1191	86,9743	88,8495	90,7447	92,6599	94,5951	96,5503	98,5255
27	81,4867	83,3021	85,1375	86,9929	88,8683	90,7637	92,6791	94,6145	96,5699	98,5452
28	8,15048	83,3204	85,1560	87,0116	85,8872	90,7828	92,6984	94,6340	96,5896	98,5652
29	81,5228	83,3386	85,1744	87,0302	88,9060	90,8018	92,7176	94,6534	96,6092	98,5850
30	81,5409	83,3569	85,1929	87,0489	88,9249	90,8209	92,7369	94,6729	96,6289	98,6049
31	81,5590	83,3752	85,2114	87,0676	88,9438	90,8400	92,7562	94,6924	96,6486	98,6248
32	81,5770	83,3934	85,2298	87,0862	88,9626	90,8590	92,7754	94,7118	96,6682	98,6446
33	81,5951	83,4117	85,2483	87,1049	88,9815	90,8781	92,7947	94,7313	96,6879	98,6645
34	81,6132	83,4300	85,2668	87,1236	89,0004	90,8972	92,8140	94,7508	96,7076	98,6844
35	81,6312	83,4482	85,2852	87,1422	89,0192	90,9162	92,8332	94,7702	96,7272	98,7042
36	81,6493	83,4665	85,3037	87,1609	89,0381	90,9353	92,8525	94,7897	96,7469	98,7241
37	81,6674	83,4848	85,3222	87,1796	89,0570	90,9544	92,8718	94,8092	96,7666	98,7440
38	81,6854	83,5030	85,3406	87,1982	89,0758	90,9734	92,8910	94,8286	96,7862	98,7638
39	81,7035	83,5213	85,3591	87,2169	89,0947	90,9925	92,9103	94,8481	96,8059	98,7837
40	81,7216	83,5396	85,3776	87,2356	89,1136	91,0116	92,9296	94,8676	96,8256	98,8036
41	81,7397	83,5579	85,3961	87,2543	89,1325	91,0307	92,9489	94,8871	96,8453	98,8235
42	81,7578	83,5762	85,4146	87,2730	89,1514	91,0498	92,9682	94,9066	96,8650	98,8434
43	81,7758	83,5944	85,4330	87,2916	89,1702	91,0688	92,9874	94,9260	96,8846	98,8632
44	81,7939	83,6127	85,4515	87,3103	89,1891	91,0879	93,0076	94,9455	96,9043	98,8831
45	81,8120	83,6310	85,4700	87,3290	89,2080	91,1070	93,0260	94,9650	96,9240	98,9030
46	81,8301	83,6493	85,4885	87,3477	89,2269	91,1261	93,0453	94,9845	96,9437	98,9229
47	81,8482	83,6676	85,5070	87,3664	89,2458	91,1452	93,0646	95,0040	96,9634	98,9428
48	81,8663	83,6859	85,5255	87,3851	89,2647	91,1643	93,0839	95,0235	96,9831	98,9627
49	81,8844	83,7042	85,5440	87,4038	89,2836	91,1834	93,1039	95,0430	97,0028	98,9826

Digitized by Google

N	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
50	81,9025	83,7225	85,5625	87,4225	89,3025	91,2025	93,1225	95,0625	97,0225	99,0025
51	81,9206	83,7408	85,5810	87,4412	89,3214	91,2216	93,1418	95,0820	97,0422	99,0224
52	81,9387	83,7591	85,5995	87,4599	89,3403	91,2407	93,1611	95,1015	97,0619	99,0423
53	81,9568	83,7774	85,6180	87,4786	89,2592	91,2598	93,1804	95,1210	97,0816	99,0622
54	81,9749	83,7957	85,6365	87,4973	89,3781	91,2789	93,1997	95,1405	97,1013	99,0821
55	81,9930	83,8140	85,6550	87,5160	89,3070	91,2980	93,2190	95,1600	97,1210	99,1020
56	82,0111	83,8323	85,6735	87,5347	89,4159	91,3171	93,2383	95,1795	97,1407	99,1219
57	82,0292	83,8506	85,6920	87,5534	89,4348	91,3362	93,2576	95,1990	97,1604	99,1418
58	82,0474	83,8690	85,7106	87,5722	89,4538	91,3554	93,2770	95,2186	97,1802	99,1618
59	82,0655	83,8873	85,7291	87,5909	89,4727	91,3745	93,2963	95,2381	97,1999	99,1817
60	82,0836	83,9056	85,7476	87,6096	89,4916	91,3936	93,3156	95,2576	97,2196	99,2016
61	82,1017	83,9239	85,7661	87,6283	89,5105	91,4127	93,3349	95,2771	97,2393	99,2215
62	82,1198	83,9422	85,7846	87,6470	89,5294	91,4318	93,3542	95,2966	97,2590	99,2414
63	82,1380	83,9606	85,8032	87,6658	89,5484	91,4510	93,3736	95,3162	97,2788	99,2614
64	82,1561	83,9789	85,8217	87,6845	89,5673	91,4701	93,3929	95,3357	97,2985	99,2813
65	82,1742	83,9972	85,8402	87,7032	89,5862	91,4892	93,4122	95,3552	97,3182	99,3012
66	82,1924	84,0156	85,8588	87,7220	89,6052	91,5084	93,4316	95,3748	97,3380	99,3212
67	82,2105	84,0339	85,8773	87,7407	89,6241	91,5275	93,4509	95,3943	97,3577	99,3411
68	82,2286	84,0522	85,8958	87,7594	89,6430	91,5466	93,4702	95,4138	97,3774	99,3610
69	82,2468	84,0706	85,9144	87,7782	89,6620	91,5658	93,4896	95,4334	97,3972	99,3810
70	82,2649	84,0889	85,9329	87,7969	89,6809	91,5849	93,5089	95,4529	97,4169	99,4009
71	82,2830	84,1072	85,9514	87,8156	89,6998	91,6040	93,5282	95,4724	97,4366	99,4208
72	82,3012	84,1256	85,9700	87,8344	89,7188	91,6232	93,5476	95,4920	97,4564	99,4408
73	82,3193	84,1439	85,9885	87,8531	89,7377	91,6423	93,5669	95,5115	97,4761	99,4607
74	82,3375	84,1623	86,0071	87,8719	89,7567	91,6615	93,5863	95,5311	97,4959	99,4807
75	82,3556	84,1806	86,0256	87,8906	89,7756	91,6806	93,6056	95,5506	97,5156	99,5006
76	82,3738	84,1990	86,0442	87,9049	89,7946	91,6998	93,6250	95,5702	97,5954	99,5206
77	82,3919	84,2173	86,0627	87,9281	89,8135	91,7189	93,6443	95,5897	97,5551	99,5405
78	82,4101	84,2357	86,0813	87,9469	89,8325	91,7381	93,6637	95,6093	97,5749	99,5605
79	82,4282	84,2540	86,0998	87,9656	89,8514	91,7572	93,6830	95,6288	97,5946	99,5804
80	82,4464	84,2724	86,1184	87,9844	89,8704	91,7764	93,7024	95,6484	97,6144	99,6004
81	82,4646	84,2908	86,1370	88,0032	89,8894	91,7956	93,7218	93,6680	97,6342	99,6204
82	82,4827	84,3091	86,1555	88,0219	89,9083	91,8147	93,7411	95,6875	97,6539	99,6403
83	82,5009	84,3275	86,1741	88,0407	89,9273	91,8339	93,7605	95,7071	97,6737	99,6603
84	82,5191	84,3459	86,1927	88,0595	89,9462	91,8531	93,7799	95,7266	97,6935	99,6803
85	82,5372	84,3642	86,2112	88,0782	89,9652	91,8722	93,7992	95,7462	97,7132	99,7002
86	82,5554	84,3826	86,2298	88,0970	89,9842	91,8914	93,8186	95,7658	97,7330	99,7202
87	82,5736	84,4010	86,2484	88,1158	90,0032	91,9106	93,8380	95,7854	97,7528	99,7402
88	82,5917	84,4193	86,2669	88,1345	90,0221	91,9297	93,8573	95,8049	97,7725	99,7601
89	82,6099	84,4377	86,2855	88,1533	90,0411	91,9489	93,8767	95,8245	97,7923	99,7801
90	82,6281	84,4561	86,3041	88,1721	90,0601	91,9681	93,8961	95,8441	97,8121	99,8001
91	82,6463	84,4745	86,3227	88,1909	90,0791	91,9873	93,9155	95,8637	97,8319	99,8201
92	82,6645	84,4929	86,3413	88,2097	90,0981	92,0065	93,9349	95,8833	97,8517	99,8401
93	82,6826	84,5112	86,3598	88,2284	90,1170	92,0256	93,9542	95,9028	97,8714	99,8600
94	82,7008	84,5296	86,3784	88,2472	90,1360	92,0448	93,9736	95,9224	97,8912	99,8800
95	82,7190	84,5480	86,3970	88,2660	90,1550	62,0640	93,9930	95,9420	97,9110	99,9000
96	82,7372	84,5664	86,4156	88,2848	90,1740	92,0832	94,0124	95,9616	97,9308	99,9200
97	82,7554	84,5848	86,4342	88,3036	90,1930	92,1024	94,0318	95,9812	97,9506	99,9400
98	82,7736	84,6032	86,4528	88,3224	90,2120	92,1216	94,0512	96,0003	97,8704	99,9600
99	82,7918	84,6216	86,4714	88,3412	90,2310	92,1408	94,0706	96,0201	97,9902	99,9800

Digitized by Google

N	10,0	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9
01	100,0200	102,0302	104,0604	106,1106	108,1808	110,2710	112,3812	114,5114	116,6616	118,8318
02	100,0400	102,0504	104,0808	106,1312	108,2016	110,2920	112,4024	114,5328	116,6832	118,8536
03	100,0600	102,0706	104,1012	106,1518	108,2224	110,3130	112,4236	114,5542	116,7048	118,8754
04	100,0800	102,0908	104,1216	106,1724	108,2432	110,3340	112,4448	114,5756	116,7264	118,8972
05	100,1000	102,1110	104,1420	106,1930	108,2640	110,3550	112,4660	114,5970	116,7480	118,8919
06	100,1200	102,1312	104,1624	106,2136	108,2828	110,3760	112,4872	114,6184	116,7696	118,9408
07	100,1400	102,1514	104,1828	106,2342	108,3056	110,3970	112,5084	114,6398	116,7912	118,9626
08	100,1600	102,1716	104,2032	106,2548	108,3264	110,4180	112,5296	114,6612	116,8128	118,9844
09	100,1801	102,1918	104,2236	106,2754	108,3472	110,4390	112,5508	114,6826	116,8344	119,0062
10	100,2001	102,2121	104,2441	106,2961	108,3681	110,4601	112,5721	114,7041	116,8561	119,0281
11	100,2201	102,2323	104,2645	106,3167	108,3889	110,4811	112,5933	114,7255	116,8777	119,0499
12	100,2401	102,2525	104,2849	106,3373	108,4097	110,5021	112,6145	114,7469	116,8993	119,0717
13	100,2601	102,2727	104,3053	106,3579	108,4305	110,5231	112,6357	114,7683	116,9209	119,0935
14	100,2801	102,2929	104,3257	106,3785	108,4513	110,5441	112,6569	114,7897	116,9425	119,1153
15	100,3002	102,3132	104,3462	106,3992	108,4722	110,5652	112,6782	114,8112	116,9642	119,1372
16	100,3202	102,3334	104,3666	106,4198	108,4930	110,5862	112,6994	114,8326	116,9858	119,1590
17	100,3402	102,3536	104,3870	106,4404	108,5138	110,6072	112,7206	114,8540	117,0074	119,1808
18	100,3603	102,3739	104,4075	106,4611	108,5347	110,6283	112,7419	114,8755	117,0291	119,2027
19	100,3803	102,3941	104,4279	106,4817	108,5555	110,6493	112,7631	114,8969	117,0507	119,2245
20	100,4004	102,4144	104,4484	106,5024	108,5764	110,6704	112,7844	114,9184	117,0724	119,2464
21	100,4204	102,4346	104,4688	106,5230	108,5972	110,6914	112,8056	114,9394	117,0940	119,2682
22	100,4004	102,4548	104,4892	106,5436	108,6180	110,7124	112,8268	114,9612	117,1156	119,2900
23	100,4605	102,4751	104,5097	106,5643	108,6389	110,7335	112,8481	114,9827	117,1373	119,3119
24	100,4805	102,4953	104,5301	106,5849	108,6597	110,7545	112,8693	115,0041	117,1589	119,3337
25	100,5006	102,5156	104,5506	106,6056	108,6806	110,7756	112,8906	115,0256	117,1806	119,3556
26	100,5206	102,5358	104,5710	106,6262	108,7014	110,7966	112,9118	115,0470	117,2022	119,3774
27	100,5407	102,5561	104,5915	106,6469	108,7223	110,8177	112,9331	115,0685	117 2239	119,3993
28	100,5607	102,5763	104,6119	106,6675	108.7431	110,8387	112,9543	115,0899	117,2455	119,4211
29	100,5808	102,5966	104,6324	106,6882	108,7640	110,8598	112,9756	115,1114	117,2672	119,4430
30	100,6009	102,6169	104,6529	106,7089	108,7849	110,8809	112,9969	115,1329	117,2889	119,4649
31	100,6209	102,6371	104,6733	106,7295	108,8057	110,9019	113,0181	115,1543	117,3105	119,4867
32	100,6410	102,6574	104,6938	106,7502	108,8266	110,9230	113,0394	115,1758	117,3322	119,5086
33	100,6610	102,6776	104,7142	106,7708	108,8474	110,9440	113,0606	115,1972	117,3538	119,5304
34	100,6811	102,6979	104,7347	106,7915	108,8683	110,9651	113,0819	115,2187	117,3755	119,5523
35	100,7012	102,7182	104,7552	106,8122	108,8892	110,9862	113,1032	115,2402	117,3972	119,5742
36	100,7212	102,7384	104,7756	106,8328	108,9100	111,0072	113,1244	115,2616	117,4188	119,5960
37	100,7413	102,7587	104,7961	106,8535	108,9309	111,0283	113,1457	115,2831	117,4405	119,6179
38	100,7614	102,7790	104,8166	106,8742	108,9518	111,0494	113,1670	115,3046	117,4622	119,6398
39	100,7815	102,7993	104,8371	106,8949	108,9727	111,0705	113,1883	115,3261	117,4839	119,6617
40	100,8016	103,8196	104,8576	106,9156	108,9936	111,0916	113,2096	115,3476	117,5056	119,6836
41	100,8216	102,8398	104,8780	106,9362	109,0144	111,1126	113,2308	115,3690	117,5272	119,7054
42	100,8417	102,8601	104,8985	106,9569	109,0353	111,1337	113,2521	115,3905	117,5489	119,7273
43	100,8618	102,8804	104,9190	106,9776	109,0562	111,1548	113,2734	115,4120	117,5706	119,7492
44	100,8819	102,9007	104,9395	106,9983	109,0771	111,1759	113,2937	115,4335	117,5923	119,7711
45	100,9020	102,9210	104,9600	107,0190	109,0980	111,1970	113,3160	115,4550	117,6140	119,7930
46	100,9221	102,9413	104,9805	107,0397	109,1189	111,2181	113,3373	115,4765	117,6357	119,8149
47	100,9422	102,9616	105,0010	107,0604	109,1398	111,2392	113,3586	115,4980	117,6574	119,8368
48	100,9623	102,9819	105,0215	107,0811	109,1607	111,2603	113,3799	115,5195	117,6791	119,8587
49	100,9824	103,0022	105,0420	107,1018	109,1816	111,2814	113,4012	115,5410	117,7008	119,8806
50	101,0025	103,0225	105,0625	107,1225	109,2025	111,3025	113,4225	115,5625	117,7225	119,9025

Digitized by Google

N	10,0	10,1	10,2	10.3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9
51	101,0226	103,0428	105,0830	107,1432	109,2234	111,3236	113,4438	115,5840	117,7442	119,9244
52	101,0427	103,0631	105,1035	107,1639	109,2443	111,3447	113,4651	115,6055	117,7659	119,9463
53	101,0628	103,0834	105,1240	107,1846	109,2652	111,3658	113,4864	115,6270	117,7876	119,9682
54	101,0829	103,1037	105,1445	107,2053	109,2861	111,3869	113,5077	115,6485	117,8093	119,9901
55	101,1030	103,1240	105,1650	107,2260	109,3070	111,4080	113,5290	115,6700	117,8310	120,0120
56	101,1231	103,1443	105,1855	107,2467	109,3279	111,4291	113,5503	115,6915	117,8527	120,0339
57	101,1432	103,1646	105,2060	107,2674	109,3488	111,4502	113,5716	115,7130	117,8744	120,0558
58	101,1633	103,1849	105,2265	107,2881	109,3697	111,4713	113,5929	115,7345	117,8961	120,0777
59	101,1834	103,2052	105,2470	107,3088	109,3906	111,4924	113,6142	115,7560	117,9178	120,0996
60	101,2036	103,2256	105,2676	107,3296	109,4116	111,5136	113,6356	115,7776	117,9396	120,1216
61	101,2237	103,2459	105,2881	107,3503	109,4325	111,5347	113,6569	115,7991	117,9613	120,1435
62	101,2438	103,2662	105,3086	107,3710	109,4534	111,5558	113,6782	115,8206	117,9830	120,1654
63	101,2639	103,2865	105,3291	107,3917	109,4743	111,5769	113,6995	115,8421	118,0047	120,1873
64	101,2840	103,3068	105,3496	107,4124	109,4952	111,5980	113,7208	115,8636	118,0264	120,2092
65	101,3042	103,3272	105,3702	107,4332	109,5162	111,6192	113,7422	115,8852	118,0482	120,2312
66	101,3243	103,3475	105,3907	107,4539	109,5371	111,6403	113,7635	115,9067	118,0699	120,2531
67	101,3444	103,3678	105,4112	107,4746	109,5580	111,6614	113,7848	115,9282	118,0916	120,2750
68	101,3646	103,3882	105,4318	107,4954	109,5790	111,6826	113,8062	115,9498	118,1134	120,2970
69	101,3847	103,4085	105,4523	107,5161	109,5999	111,7037	113,8275	115,9713	118,1351	120,3189
70	101,4049	103,4289	105,4729	107,5369	109,6209	111,7249	113,8489	115,9929	118,1569	120,3409
71	101,4250	103,4492	105,4934	107,5576	109,6418	111,7460	113,8702	116,0144	118,1786	120,3628
72	101,4451	103,4695	105,5139	107,5783	109,6627	111,7671	113,8915	116,0359	118,2003	120,3847
73	101,4653	103,4899	105,5345	107,5991	109,6837	111,7883	113,9129	116,0575	118,2221	120,4067
74	101,4854	103,5102	105,5550	107,6198	109,7046	111,8094	113,9342	116,0790	118,2438	120,4286
75	101,5056	103,5306	105,5756	107,6406	109,7256	111,8306	113,9556	116,1006	118,2656	120,4506
76	101,5257	103,5509	105,5961	107,6613	109,7465	111,8517	113,9769	116,1221	118,2873	130,4725
77	101,5459	103,5713	105,6167	107,6821	109,7675	111,8729	113,9983	116,1437	118,3091	120,4945
78	101,5660	103,5916	105,6372	107,7028	109,7884	111,8940	114,0196	116,1652	118,3308	120,5164
79	101,5862	103,6120	105,6578	107,7236	109,8094	111,9152	114,0410	116,1868	118,3526	120,5384
80	101,6064	103,6324	105,6784	107,7444	109,8304	111,9364	114,0624	116,2084	118,3744	120,5604
81	101,6265	103,6527	105,6989	107,7651	109,8513	111,9575	114,0837	116,2299	118,3961	120,5823
82	101,6467	103,6731	105,7195	107,7859	109,8723	111,9787	114,1051	116,2515	118,4179	120,6043
83	101,6668	103,6934	105,7400	107,8066	109,8932	111,9998	114,1264	116,2730	118,4396	120,6262
84	101,6870	103,7138	105,7606	107,8274	109,9142	112,0210	114,1478	116,2946	118,4614	120,6482
85	101,7072	103,7342	105,7812	107,8482	109,9352	112,0422	114,1692	116,3162	118,4832	120,6702
86	101,7273	103,7545	105,8017	107,8689	109,9561	112,0633	114,1905	116,3377	118,5049	120,6921
87	101,7475	103,7749	105,8223	107,8897	109,9771	112,0845	114,2136	116,3593	118,5267	120,7141
88	101,7677	103,7953	105,8429	107,9105	109,9981	112,1057	114,2333	116,3809	118,5465	120,7361
89	101,7879	103,8157	105,8635	107,9313	110,0191	112,1269	114,2547	116,4025	118,5703	120,7581
90	101,8081	103,8361	105,8841	107,9521	110,0401	112,1481	114,2761	116,4241	118,5921	120,7801
91	101,8282	103,8564	105,9046	107,9728	110,0610	112,1692	114,2974	116,4456	118,6138	120,8020
92	101,8484	103,8768	105,9252	107,9936	110,0820	112,1904	114,3188	116,4672	118,6356	120,8240
93	101,8686	103,8972	105,9458	108,0144	110,1030	112,2116	114,3402	116,4888	118,6574	120,8460
94	101,8888	103,9176	105,9664	108,0352	110,1240	112,2328	114,3616	116,5104	118,6792	120,8680
95	101,9090	103,9380	105,9870	108,0560	110,1450	112,2540	114,3830	116,5320	118,7010	120,8900
96	101,9292	103,9584	106,0076	108,0768	110,1660	112,2752	114,4044	116,5536	118,7228	120,9120
97	101,9494	103,9788	206,0282	108,0976	110,1870	112,2964	114,4258	116,5752	118,7446	120,9340
98	101,9696	103,9992	106,0488	108,1184	110,2080	112,3176	114,4472	116,5968	118,7664	120,9560
99	101,9898	104,0196	106,0694	108,1392	110,2290	112,3388	114,4686	116,6184	118,7882	120,9780
100	102,0100	104,0400	106,0900	108,1600	110,2500	112,3600	114,4900	116,6400	118,8100	120,0000

Digitized by Google

N	11,0	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9
01	121,0220	123,2322	125,4624	127,7126	129,9828	132,2730	134,5832	136,9134	139,2636	141,6338
02	121,0440	123,2544	125,4848	127,7352	130,0056	132,2960	134,6064	136,9368	139,2872	141,6576
03	121,0660	123,2766	125,5072	127,7578	130,0284	132,3190	134,6296	136,9602	139,3108	141,6814
04	121,0880	123,2988	125,5296	127,7804	130,0512	132,3420	134,6528	136,9836	139,3344	141,7052
05	121,1100	123,3210	125,5520	127,8030	130,0740	132,3650	134,6760	137,0070	139,3580	141,7290
06	121,1320	123,3432	125,5744	127,8256	130,0968	132,3880	134,6992	137,0304	139,3816	141,7528
07	121,1540	123,3654	125,5968	127,8482	130,1196	132,4110	134,7224	137,0538	139,4052	141,7766
08	121,1760	123,3877	125,6193	127,8709	130,1425	132,4341	134,7457	137,0773	139,4289	141,8005
09	121,1980	123,4099	125,6417	127,8935	130,1653	132,4571	134,7689	137,1007	139,4524	141,8243
10	121,2201	123,4321	125,4641	127,9161	130,1881	132,4801	134,7921	137,1241	139,4761	141,8481
11	121,2421	123,4543	125,6865	127,9387	130,2109	132,5031	134,8153	137,1475	139,4997	141,8719
12	121,2641	123,4765	125,7089	127,9613	130,2337	132,5261	134,8385	137,1709	139,5233	141,8957
13	121,2861	123,4988	125,7314	127,9840	130,2566	132,5492	134,8618	137,1944	139,5470	141,9197
14	121,3081	123,5210	125,7538	128,0066	130,2794	132,5722	134,8850	137,2178	139,5706	141,9434
15	121,3302	123,5432	125,7762	128,0292	130,3022	132,5952	134,9082	137,2412	139,5942	141,9672
16	121,3522	123,5655	125,7987	128,0519	130,3251	132,6183	134,9315	137,2647	139,6179	141,9911
17	121,3742	123,5878	125,8211	128,0745	130,3479	132,6413	134,9547	137,2881	139,6415	142,0149
18	121,3963	123,6100	125,8435	128,0971	130,3707	132,6643	134,9779	147,3115	139,6651	142,0387
19	121,4183	123,6321	125,8660	128,1198	130,3936	132,6874	135,0012	137,3350	139,6888	142,0626
20	121,4404	123,6544	125,8884	128,1424	130,4164	132,7104	135,0244	187,3584	139,7124	142,0864
21	121,4624	123,6766	125,9108	128,1650	130,4392	132,7334	135,0476	137,3818	139,7360	142,1102
22	121,4844	123,6989	125,9333	128,1877	130,4621	132,7565	135,0709	137,4053	139,7597	142,1341
23	121,5065	123,7211	125,9557	128,2103	130,4849	132,7795	135,0941	137,4287	139,7833	142,1579
24	121,5285	123,7434	125,9782	128,2330	130,5078	132,8026	135,1174	137,4522	139,8070	142,1818
25	121,5506	123,7656	126,0006	128,2556	130,5306	132,8256	135,1406	137,4756	139,8306	142,2056
26	121,5726	123,7879	126,0231	128,2783	130,5535	132,8487	135,1639	137,4991	139,8543	142,2295
27	121,5947	123,8101	126,0455	128,3009	130,5763	132,8717	135,1871	137,5225	139,8779	142,2533
28	121,6167	123,8324	126,0680	128,3236	130,5992	132,8948	135,2104	137,5460	139,9016	142,2772
29	121,6388	123,8546	126,0904	128,3462	130,6220	132,9178	135,2336	137,5694	139,9252	142,3010
30	121,6609	123,8769	126,1129	128,3689	130,6449	132,9409	135,2569	137,5929	139,9489	142,3249
31	121,6830	123,8992	126,1354	128,3916	130,6678	132,9640	135,2802	137,6164	139,9726	142,3488
32	121,7050	123,9214	126,1578	128,4142	130,6906	132,9870	135,3034	137,6398	139,9962	142,3726
33	121,7271	123,9437	126,1803	128,4369	130,7135	133,0101	135,3267	137,6633	140,0199	142,3965
34	121,7492	123,9660	126,2028	128,4596	130,7364	133,0332	135,3500	137,6868	140,0436	142,4204
35	121,7712	123,9882	126,2252	128,4822	130,7592	133,0562	135,3732	137,7102	140,0672	142,4442
36	121,7933	124,0105	126,2477	128,5049	130,7821	133,0793	135,3965	137,7337	140,0909	142,4681
37	121,8154	124,0328	126,2702	128,5276	130,8050	133,1024	135,4198	137,7572	140,1146	142,4920
38	121,8374	124,0550	126,2926	128,5502	130,8278	133,1254	135,4430	137,7806	140,1382	142,5158
39	121,8595	124,0773	126,3151	128,5729	130,8507	133,1485	135,4663	137,8041	140,1619	142,5397
40	121,8816	124,0996	126,3376	128,5956	130,8736	133,1716	135,4896	137,8276	140,1856	142,5636
41	121,9037	124,1219	126,3608	128,6183	130,8965	133,1947	135,5129	137,8511	140,2093	142,5875
42	121,9258	124,1442	126,3826	128,6410	130,9194	133,2178	135,5362	137,8746	140,2330	142,6114
43	121,9478	124,1664	126,4050	128,6636	130,9422	133,2408	135,5594	137,8980	140,2566	142,6352
44	121,9699	124,1887	126,4275	128,6863	130,9651	133,2639	135,5827	137,9215	140,2803	142,6591
45	121,9920	124,2110	126,4500	128,7090	130,9880	133,2870	135,6060	137,9450	140,3040	142,6830
46	122,0141	124,2333	126,4725	128,7317	131,0109	133,3101	135,6293	137,9685	140,3277	142,7069
47	122,0362	124,2556	126,4950	128,7544	131,0338	133,3332	135,6526	137,9920	140,3514	142,7308
48	122,0583	124,2779	126,5175	128,7771	131,0567	133,3563	135,6759	138,0155	140,3751	142,7547
49	122,0804	124,3002	126,5400	128,7998	131,0796	133,3794	135,6992	138,0390	140,3988	142,7786
50	122,1025	124,3225	126,5625	128,8225	131,1025	133,4025	135,7225	138,0625	140,4225	142,8025

Digitized by Google

N	11,0	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9
51	122,1246	124,3448	126,5850	128,8452	131,1254	133,4256	135,7458	138,0860	140,4462	142,8264
52	122,1467	124,3471	126,6075	128,8679	131,1483	133,4487	135,7691	138,1095	140,4699	142,8503
53	122,1688	124,3894	126,6300	128,8906	131,1712	133,4718	135,7924	138,1330	140,4936	142,8742
54	122,1909	124,4117	126,6525	128,9133	131,1941	133,4949	135,8157	138,1565	140,5173	142,8981
55	122,2130	124,4340	126,6750	128,9360	131,2170	133,5180	135,8390	138,1800	140,5410	142,9220
56	122,2351	124,4563	126,6975	128,9587	131,2399	133,5411	135,8623	138,2035	140,5647	142,9459
57	122,2572	124,4786	126,7200	128,9814	131,2628	133,5642	135,8856	138,2270	140,5884	142,9698
58	122,2793	124,5009	126,7425	129,0041	131,2857	133,5873	135,9089	138,2505	140,6121	142,9937
59	122,3014	124,5232	126,7650	129,0268	131,3086	133,6104	135,9322	138,2740	140,6358	143,0176
60	122,3236	124,5456	126,7876	129,0496	131,3316	133,6336	135,9556	138,2976	140,6596	143,0416
61	122,3457	124,5679	126,8101	129,0723	131,3545	133,6567	135,9789	138,3211	140,6833	143,0655
62	122,3678	124,5902	126,8326	129,0950	131,3774	133,6798	136,0022	138,3446	140,7070	143,0894
63	122,3899	124,6125	126,8551	129,1177	131,4003	133,7029	136,0255	138,3681	140,7307	143,1133
64	122,4120	124,6348	126,8776	129,1404	131,4232	133,7260	136,0488	138,3916	140,7544	143,1372
65	122,4342	124,6572	126,9002	129,1632	131,4462	133,7492	136,0722	138,4152	140,7782	143,1612
66	122,4563	124,6795	126,9227	129,1859	131,4691	133,7723	136,0955	138,4387	140,8019	143,1851
67	122,4784	124,7018	126,9452	129,2086	131,4920	133,7954	136,4188	138,4622	140,8256	143,2090
68	122,5006	124,7242	126,9678	129,2314	131,5150	133,8186	136,1422	138,4858	140,8494	143,2330
69	122,5227	124,7465	126,9903	129,2541	131,5379	133,8417	136,1655	138,5093	140,8731	143,2569
70	122,5449	124,7689	127,0129	129,2769	131,5609	133,8649	136,1889	138,5329	140,8969	143,2809
71	122,5670	124,7912	127,0354	129,2996	131,5838	133,8880	136,2122	138,5564	140,9206	143,3048
72	122,5891	124,8135	127,0579	129,3223	131,6067	133,9111	136,2355	138,5799	140,9443	143,3287
73	122,6113	124,8359	127,0805	129,3451	131,6297	133,9343	136,2589	138,6035	140,9681	143,3527
74	122,6334	124,8582	127,1030	129,3678	131,6526	133,9574	136,2822	138,6270	140,9918	143,3766
75	122,6556	124,8806	127,1256	129,3906	131,6756	133,9806	136,3056	138,6506	141,0156	143,4006
76	122,6777	124,9029	127,1481	129,4133	131,6985	134,0037	136,3289	138,6741	141,0393	143,4245
77	122,6999	124,9253	127,1707	129,4361	131,7215	134,0269	136,3523	138,6977	141,0631	143,4485
78	122,7220	124,9476	127,1932	129,4588	131,7444	134,0500	136,3756	138,7212	141,0868	143,4724
79	122,7442	124,9700	127,2158	129,4816	131,7674	134,0732	136,3990	138,7448	141,1106	143,4964
80	122,7664	124,9924	127,2384	129,5044	131,7904	134,0964	136,4224	138,7684	141,1344	143,5204
81	122,7885	125,0147	127,2609	129,5271	131,8133	134,1195	136,4457	138,7919	141,1581	143,5443
82	122,8107	125,0371	127,2835	129,5499	131,8363	134,1427	136,4691	138,8155	141,1819	143,5683
83	122,8328	125,0594	127,3060	129,5726	131,8592	134,1658	136,4924	138,8390	141,2056	143,5922
84	122,8550	125,0818	127,3286	129,5954	131,8822	134,1890	136,5158	138,8626	141,2294	143,6162
85	122,8772	125,1042	127,3512	129,6182	131,9052	134,2122	136,5392	138,8862	141,2532	143,6402
86	122,8993	125,1265	127,3737	129,6409	131,9281	134,2353	136,5625	138,9097	141,2769	143,6641
87	122,9215	125,1489	127,3963	129,6637	131,9511	134,2585	136,5859	138,9333	141,3007	143,6881
88	122,9437	125,1713	127,4189	129,6865	131,9741	134,2817	136,6093	138,9596	141,3245	143,7121
89	122,9659	125,1937	127,4415	129,7093	131,9971	134,3049	136,6325	138,9805	141,3483	143,7361
90	122,9881	125,2161	127,4641	129,7321	132,0201	134,3281	136,6561	139,0041	141,3721	143,7601
91	123,0102	125,2384	127,4866	129,7548	132,0430	134,3512	136,6794	139,0276	141,3958	143,7840
92	123,0324	125,2608	127,5092	129,7776	132,0660	134,3744	136,7028	139,0512	141,4196	143,8080
93	123,0546	125,2832	127,5318	129,8004	132,0890	134,3976	136,7262	139,0748	141,4434	143,8320
94	123,0768	125,3056	127,5544	129,8232	132,1120	134,4208	136,7496	139,0984	141,4672	143,8560
95	123,0990	125,3280	127,5770	129,8460	132,1350	134,4440	136,7730	139,1220	141,4910	143,8800
96	123,1212	125,3504	127,5996	129,8688	132,1580	134,4672	136,7964	139,1456	141,5148	143,9040
97	123,1434	125,3728	127,6222	129,8916	132,1810	134,4904	136,8198	139,1692	141,5386	143,9280
98	123,1656	125,3952	127,6448	129,9144	132,2040	134,5136	136,8432	139,1928	141,5624	143,9520
99	123,1878	125,4176	127,6674	129,9372	132,2270	134,5368	136,8666	139,2164	141,5862	143,9760
100	123,2100	125,4400	127,6900	129,9600	132,2500	134,5600	136,8900	139,2400	141,6100	144,0000

Digitized by Google

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0,0000	1,0000	4,0000	9,0000	16,0000	25,0000	36,0000	49,0000	64,0000	81,0000
01	0,0001	1,0201	4,0401	9,0601	16,0801	25,1001	36,1201	49,1401	64,1601	81,1801
02	0,0004	1,0404	4,0804	9,1204	16,1604	25,2004	36,2401	49,2804	64,3204	81,3604
03	0,0009	1,0609	4,1209	9,1809	16,2409	25,3009	36,3609	49,4209	64,4809	81,5409
04	0,0016	1,0816	4,1616	9,2416	16,3216	25,4016	36,4816	49,5616	64,6416	81,7216
05	0,0025	1,1025	4,2025	9,3025	16,4025	25,5025	36,6025	49,7025	64,8025	81,9025
06	0,0036	1,1236	4,2436	9,3636	16,4836	25,6036	36,7236	49,8436	64,9636	82,0836
07	0,0049	1,1449	4,2849	9,4249	16,5649	25,7049	36,8449	49,9849	65,1249	82,2649
08	0,0064	1,1664	4,3264	9,4864	16,6464	25,8064	36,9664	50,1264	65,2864	82,4464
09	0,0081	1,1881	4,3681	9,5481	19,7281	25,9081	37,0881	50,2681	65,4481	82,6281
10	0,0100	1,2100	4,4100	9,6100	16,8100	26,0100	37,2100	50,4100	65,6100	82,8100
11	0,0121	1,2321	4,4521	9,6721	16,8921	26,1121	37,3321	50,5521	65,7721	82,9921
12	0,0144	1,2544	4,4944	9,7344	16,9744	26,2144	37,4544	50,6944	65,9344	83,1744
13	0,0169	1,2769	4,5369	9,7969	17,0569	26,3169	37,5769	50,8369	66,0969	83,3569
14	0,0196	1,2996	4,5796	9,8596	17,1396	26,4196	37,6996	50,9796	66,2596	83,7225
15	0,0225	1,3225	4,6225	9,9225	17,2225	26,5225	37,8225	51,1225	66,4225	83,9056
16	0,0256	1,3456	4,6656	9,9856	17,3056	26,6256	37,9456	51,2656	66,5856	84,0889
17	0,0289	1,3689	4,7089	10,0489	17,3889	26,7289	38,0689	51,4089	66,7489	84,2724
18	0,0324	1,3924	4,7524	10,1124	17,4724	26,8324	38,1924	51,5524	66,9124	84,4561
19	0,0361	1,4161	4,7961	10,1761	17,5561	26,9361	38,3161	51,6961	67,0761	84,6460
20	0,0400	1,4400	4,8400	10,2400	17,6400	27,0400	38,4400	51,8400	67,2400	84,8241
21	0,0441	1,4641	4,8841	10,3041	17,7241	27,1441	38,5641	51,9841	67,4041	85,0082
22	0,0484	1,4884	4,9284	10,3684	17,8084	27,3484	38,6884	52,1284	67,5684	85,1929
23	0,0529	1,5129	4,9729	10,4329	17,8929	27,3529	38,8129	52,2729	67,7329	85,3776
24	0,0576	1,5376	5,0176	10,4976	17,9776	27,4576	38,9376	52,4176	67,8976	85,5625
25	0,0625	1,5625	5,0625	10,5625	18,0625	27,5625	39,0625	52,5625	68,0625	85,7476
26	0,0676	1,5876	5,1076	10,6276	18,1476	27,6676	39,1876	52,7076	68,2276	85,9329
27	0,0729	1,6129	5,1529	10,6929	18,2329	27,7729	39,3129	52,8529	68,3929	86,1184
28	0,0784	1,6384	5,1984	10,7584	18,3184	27,8784	39,4384	52,9984	68,5584	86,3041
29	0,0841	1,6641	5,2441	10,8241	18,4041	27,9841	39,5641	53,1441	68,7241	86,4900
30	0,0900	1,6900	5,2900	10,8900	18,4900	28,0900	39,6900	53,2900	68,8900	86,6761
31	0,0961	1,7161	5,3361	10,9561	18,5761	28,1961	39,8161	53,4361	69,0561	86,8624
32	0,1024	1,7424	5,3824	11,0224	18,6624	28,3024	39,9424	53,5824	69,2224	87,0489
33	0,1089	1,7689	5,4289	11,0889	18,7489	28,4089	40,0689	53,7289	69,3889	87,2365
34	0,1156	1,7965	5,4756	11,1556	18,8356	28,5156	40,1956	53,8756	69,5556	87,4225
35	0,1225	1,8225	5,5225	11,2225	18,9225	28,6293	40,3225	54,0225	69,7225	87,6096
36	0,1296	1,8496	5,5696	11,2896	19,0096	28,7296	40,4496	54,1696	69,8896	87,7969
37	0,1369	1,8769	5,6169	11,3569	19,0969	28,8369	40,5769	54,3169	70,0569	87,9844
38	0,1444	1,9044	5,6644	11,4244	19,1844	28,9444	40,7044	54,4644	70,2244	88,1721
39	0,1521	1,9321	5,7121	11,4921	19,2721	29,0521	40,8321	54,6121	70,3921	88,3600
40	0,1600	1,9600	5,7600	11,5600	19,3600	29,1600	40,9600	54,7600	70,5600	88,5481
41	0,1681	1,9881	5,8081	11,6281	19,4481	29,2681	41,0881	54,9081	70,7281	88,7364
42	0,1764	2,0164	5,8564	11,6964	19,5364	29,3764	41,2164	55,0564	70,8964	88,9249
43	0,1849	2,0449	5,9049	11,7649	19,6249	29,4849	41,3449	55,2049	71,0649	89,1136
44	0,1936	2,0736	5,9536	11,8336	19,7136	29,5936	41,4736	55,3536	71,2336	89,3025
45	0,2025	2,1025	6,0025	11,9025	19,8025	29,7025	41,6025	55,5025	71,4025	89,4916
46	0,2116	2,1316	6,0516	11,9716	19,8916	29,8116	41,7316	55,6516	71,5716	89,6809
47	0,2209	2,1609	6,1009	12,0409	19,9809	29,9209	41,8609	55,8009	71,7409	89,8704
48	0,2304	2,1904	6,1504	12,1104	20,0704	30,0304	41,9904	55,9504	71,9104	89,8845
49	0,2401	2,2201	6,2001	12,1801	20,1601	30,1401	42,1201	57,1001	72,0801	90,0601

Digitized by Google

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	0,2500	2,2500	6,2500	12,2500	20,2500	30,2500	42,2500	56,2500	72,2500	90,2500
51	0,2601	2,2801	6,3001	12,3201	20,3401	30,3601	42,3801	56,4001	72,4201	90,4401
52	0,2704	2,3104	6,3304	12,3904	20,4304	30,4704	42,5104	56,5504	72,5904	90,6304
53	0,2809	2,3409	6,4009	12,4609	20,5209	30,5809	42,6409	56,7009	72,7609	90,8209
54	0,2916	2,3716	6,4316	12,5316	20,6116	30,6916	42,7716	56,8516	72,9316	91,0116
55	0,3025	2,4025	6,5025	12,6025	20,7025	30,8025	42,9025	57,0025	73,1025	91,2025
56	0,3136	2,4336	6,5536	12,6736	20,7936	30,9136	43,0336	57,1536	73,2736	91,3936
57	0,3249	2,4649	6,6049	12,7449	20,8849	30,0249	43,1649	57,3049	73,4449	91,5849
58	0,3364	2,4964	6,6564	12,8164	20,9764	30,1364	43,2964	57,4564	73,6164	91,7764
59	0,3481	2,5281	6,7081	12,8881	21,0681	31,2481	43,4281	57,6081	73,7881	91,9681
60	0,3600	2,5600	6,7600	12,9600	21,1600	31,3600	43,5600	57,7600	73,9600	92,1600
61	0,3721	2,5921	6,8121	13,0321	21,2521	31,4721	43,6921	57,9121	74,1321	92,3521
62	0,3844	2,6244	6,8644	13,1044	21,3444	31,5844	43,8244	58,0644	74,3044	92,5444
63	0,3969	2,6569	6,9169	13,1769	21,4369	31,6969	43,9569	58,2169	74,4769	92,7369
64	0,4096	2,6896	6,9696	13,2496	21,5296	31,8096	44,0896	58,3696	74,6496	92,9296
65	0,4225	2,7225	7,0225	13,3225	21,6225	31,9225	44,2225	58,5225	74,8225	93,1225
66	0,4356	2,7556	7,0756	13,3956	21,7156	32,0356	44,3556	58,6756	74,9956	93,3156
67	0,4489	2,7889	7,1289	13,4689	21,8089	32,1489	44,4889	58,8289	75,1689	93,5089
68	0,4624	2,8224	7,1824	13,5424	21,9024	32,2624	44,6224	58,9824	75,3424	93,7024
69	0,4761	2,8561	7,2361	13,6161	21,9961	32,3761	44,7561	59,1361	75,5161	93,8961
70	0,4900	2,8900	7,2900	13,6900	22,0900	32,4900	44,8900	59,2900	75,6900	94,0900
71	0,5041	2,9241	7,3441	13,7641	22,1841	32,6041	45,0241	59,4441	75,8641	94,2841
72	0,5184	2 9584	7,3984	13,8384	22,2784	32,7184	45,1584	59,5984	76,0384	94,4784
73	0,5329	2,9929	7,4529	13,9129	22,3129	32,8329	45,2929	59,7529	76,2129	94,6729
74	0,5476	3,0276	7,5076	13,9876	22,4676	32,9476	45,4276	59,9076	76,3876	94,8676
75	0,5625	3,0625	7,5625	14,0625	22,5625	33,0625	45,5625	60,0625	76,5625	95,0625
76	0,5776	3,0976	7,6176	14,1376	22,6576	33,1776	45,6976	60,2176	76,7376	95,2576
77	0,5929	3,1329	7,6729	14,2129	22,7529	33,2929	45,8329	60,3729	76,9129	95,4529
78	0,6084	3,1684	7,7284	14,2884	22,8484	33,4084	45,9684	60,5284	77,0884	95,6484
79	0,6241	3,2041	7,7841	14,3641	22,9441	33,5241	46,1041	60,6841	77,2641	95,8441
80	0,6400	3,2400	7,8400	14,4400	23,0400	33,6400	46,2400	60,8400	77,4400	96,0400
81	0,6561	3,2761	7,8961	14,5161	23,1361	33,7561	46,3761	60,9961	77,6161	96,2361
82	0,6724	3,3124	7,9524	14,5924	23,2324	33,8724	46,5124	61,1524	77,7924	96,4324
83	0,6889	3,3489	8,0089	14,6689	23,3289	33,9889	46,6489	61,3089	77,9689	96,6289
84	0,7056	3,3856	8,0656	14,7456	23,4256	34,1056	46,7856	61,4656	78,1456	96,8256
85	0,7225	3,4225	8,1225	14,8225	23,5225	34,2225	46,9225	61,6225	78,3225	97,0225
86	0,7396	3,4596	8,1796	14,8996	23,6196	34,3396	47,0596	61,7796	78,4996	97,2196
87	0,7569	3,4969	8,2369	14,9769	23,7169	34,4569	47,1969	61,9369	78,6769	97,4169
88	0,7744	3,5344	8,2944	15,0544	23,8144	34,5744	47,3344	62,0944	78,8544	97,6144
89	0,7921	3,5721	8,3521	15,1321	23,9121	34,6921	47,4721	62,2521	79,0321	97,8124
90	0,8100	3,6100	8,4100	15,2100	24,0100	34,8100	47,6100	62,4100	79,2100	98,0100
91	0,8281	3,6481	8,4681	15,2881	24,1081	34,9281	47,7481	62,5681	79,3881	98,2081
92	0,8464	3,6864	8,5264	15,3664	24,2064	35,0464	47,8864	62,7264	79,5664	98,4064
93	0,8649	3,7249	8,5849	15,4449	24,3049	35,1649	48,0249	62,8849	79,7449	98,6049
94	0,8836	3,7636	8,6436	15,5236	24,4036	35,2836	48,1636	63,0436	79,9236	98,8036
95	0,9025	3,8025	8,7025	15,6025	24,5025	35,4025	48,3025	63,2025	80,1025	99,0025
96	0,9216	3,8416	8,7616	15,6816	24,6016	35,5216	48,4416	63,3616	80,2816	99,2016
97	0,9409	3,8809	8,8209	15,7609	24,7009	35,6409	48,5809	63,5209	80,4609	99,4009
98	0,9604	3,9204	8,8804	15,8404	24,8004	35,7604	48,7204	63,6804	80,6404	99,6004
99	0,9804	3,9601	8,9401	15,9201	24,9001	35,8801	48,8601	63,8401	80,8201	99,8001

Digitized by Google

TABLE II.

VALEURS DE L'INTÉGRALE $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$

CORRESPONDANTES AUX VALEURS DE t CONTENUES DANS LES COLONNES (t).

La probabilité que l'erreur d'observation soit comprise entre $\pm t$ est exprimée par les nombres contenus dans les colonnes $\Theta(t)$.

Digitized by Google

Digitized by Google

t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2	t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2
0.00	0.00000 00	1128 33	22	0.40	0.42839 22	957 68	7 82
0.01	0.01128 33	1128 11	45	0.41	0.43796 90	949 86	7 95
0.02	0.02256 44	1127 66	67	0.42	0.44746 76	941 91	8 07
0.03	0.03384 10	1126 99	90	0.43	0.45688 67	933 84	8 17
0.04	0.04511 09	1126 09	1 12	0.44	0.46622 51	925 67	8 30
0.05	0.05637 18	1124 97	1 35	0.45	0.47548 18	917 37	8 40
0.06	0.06762 15	1123 62	1 58	0.46	0.48465 55	908 97	8 51
0.07	0.07885 77	1122 04	1 79	0.47	0.49374 52	900 46	8 61
0.08	0.09007 81	1120 25	2 01	0.48	0.50274 98	891 85	8 69
0.09	0.10128 06	1118 24	2 24	0.49	0.51166 83	883 16	8 78
0.10	0.11246 30	1116 00	2 46	0.50	0.52049 99	874 38	8 88
0.11	0.12362 30	1113 54	2 67	0.51	0.52924 37	865 50	8 96
0.12	0.13475 84	1110 87	2 88	0 52	0.53789 87	856 54	9 03
0.13	0.14586 71	1107 99	3 10	0.53	0.54646 41	847 51	9 10
0.14	0.15694 70	1104 89	3 31	0.54	0.55493 92	838 41	9 17
0.15	0.16799 59	1101 58	3 52	0.55	0.56332 33	829 24	9 23
0.16	0.17901 17	1098 06	3 72	0.56	0.57161 57	820 01	9 30
0.17	0.18999 23	1094 34	3 93	0.57	0.57981 58	810 71	9 35
0.18	0.20093 57	1090 41	4 14	0.58	0.58792 29	801 36	9 40
0.19	0.21183 98	1086 27	4 34	0.59	0.59593 65	791 96	9 45
0.20	0.22270 25	1081 93	4 53	0.60	0.60385 61	782 51	9 49
0.21	0.23352 18	1077 40	4 73	0.61	0.61168 12	773 02	9 53
0.22	0.24429 58	1072 67	4 92	0.62	0.61941 14	763 49	9 53
0.23	0.25502 25	1067 75	5 12	0.63	0.62704 63	753 94	9 59
0.24	0.26570 00	1062 63	5 29	0.64	0.63458 57	744 35	9 62
0.25	0.27632 63	1057 34	5 49	0.65	0.64202 92	734 73	9 63
0.26	0.28689 97	1051 85	5 67	0.66	0.64937 65	725 10	9 65
0.27	0.29741 82	1046 18	5 84	0.67	0.65662 75	715 45	9 66
0.28	0.30788 00	1040 34	6 01	0.68	0.66378 20	705 79	9 68
0.29	0.31828 34	1034 33	6 19	0.69	0.67083 99	696 11	9 67
0.30	0.32862 67	1028 14	6 36	0.70	0.67780 10	686 44	9 68
0.31	0.33890 81	1021 78	6 52	0.71	0.68466 54	676 76	9 68
0.32	0.34912 59	1015 26	6 67	0.72	0.69143 30	667 08	9 66
0.33	0.35927 85	1008 59	6 84	0.73	0.69810 38	657 42	9 66
0.34	0.36936 44	1001 75	6 98	0.74	0.70467 80	647 76	9 65
0.35	0.37938 19	994 77	7 14	0 75	0.71115 56	638 11	9 62
0.36	0 38932 96	987 63	7 29	0.76	0.71753 67	628 49	9 61
0 37	0.39920 59	980 34	7 42	0.77	0.72382 16	618 88	9 57
0.38	0.40900 93	972 92	7 55	0.78	0.73001 04	609 31	9 56
0.39	0.41873 85	965 37	7 69	0.79	0.73610 35	599 75	9 52

Digitized by Google

t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2	t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2
0.80	0.74210 10	590 23	9 48	1.25	0.92290 01	233 58	5 81
0.81	0.74800 33	580 75	9 45	1.26	0.92523 59	227 77	5 71
0.82	0.75381 08	571 30	9 41	1.27	0.92751 36	222 06	5 61
0.83	0.75952 38	561 89	9 36	1.28	0.92973 42	216 45	5 52
0.84	0.76514 27	552 53	9 31	1.29	0.93189 87	210 93	5 41
0.85	0.77066 80	543 22	9 26	1.30	0.93400 80	205 52	5 32
0.86	0.77610 02	533 96	9 21	1.31	0.93606 32	200 20	5 22
0.87	0.78143 98	524 75	9 16	1.32	0.93806 52	194 98	5 11
0.88	0.78668 73	515 59	9 09	1.33	0.94001 59	189 87	5 02
0.89	0.79184 32	506 50	9 04	1.34	0.94191 37	184 85	4 93
0.90	0.79690 82	497 46	8 97	1.35	0.94376 22	179 92	4 82
0.91	0.80188 28	488 49	8 91	1.36	0.94556 14	175 10	4 74
0.92	0.80676 77	479 58	8 83	1.37	0.94731 24	170 36	4 63
0.93	0.81156 35	470 75	8 77	1.38	0.94901 60	165 73	4 55
0.94	0.81627 10	461 98	8 70	1.39	0.95067 33	161 18	4 45
0.95	0.82089 08	453 28	8 61	1.40	0.95228 51	156 73	4 35
0.96	0.82542 36	444 67	8 55	1.41	0.95385 24	152 38	4 27
0.97	0.82987 03	436 12	8 46	1.42	0.95537 62	148 11	4 18
0.98	0.83423 15	427 66	8 39	1.43	0.95685 73	143 93	4 09
0.99	0.83850 81	419 27	8 30	1.44	0.95829 66	139 84	3 99
1.00	0.84270 08	410 97	8 22	1.45	0.95969 50	135 85	3 91
1.01	0.84681 05	402 75	8 13	1.46	0.96105 35	131 94	3 82
1.02	0.85083 80	394 62	8 05	1.47	0.96237 29	128 12	3 74
1.03	0.85478 42	386 57	7 96	1.48	0.96365 41	124 38	3 65
1.04	0.85864 99	378 61	7 86	1.49	0.96489 79	120 73	3 57
1.05	0.86243 60	370 75	7 77	1.50	0.96610 52	117 16	3 49
1.06	0.86614 35	362 97	7 68	1.51	0.96727 68	113 67	3 40
1.07	0.86977 32	355 29	7 60	1.52	0.96841 35	110 27	3 32
1.08	0.87332 61	347 69	7 49	1.53	0.96951 62	106 95	3 25
1.09	0.87680 30	340 20	7 40	1.54	0.97058 57	103 70	3 16
1.10	0.88020 50	332 80	7 31	1.55	0.97162 27	100 54	3 09
1.11	0.88353 30	325 49	7 21	1.56	0.97262 81	97 45	3 01
1.12	0.88678 79	318 28	7 12	1.57	0.97360 26	94 44	2 94
1.13	0.88997 07	311 16	7 01	1.58	0.97454 70	91 50	2 86
1.14	0.89308 23	304 15	6 91	1.59	0.97546 20	88 64	2 79
1.15	0.89612 38	297 24	6 82	1.60	0.97634 84	85 85	2 73
1.16	0.89909 62	290 42	6 72	1.61	0.97720 69	83 12	2 64
1.17	0.90200 04	283 70	6 61	1.62	0.97803 81	80 48	2 59
1.18	0.90483 74	277 09	6 52	1.63	0.97884 29	77 89	2 51
1.19	0.90760 83	270 57	6 42	1.64	0.97962 18	75 38	2 45
1.20	0.91031 40	264 15	6 31	1.65	0.98037 56	72 93	2 36
1.21	0.91295 55	257 84	6 22	1.66	0.98110 49	70 55	2 31
1.22	0.91553.39	251 62	6 11	1.67	0.98181 04	68 24	2 26
1.23	0.81805 01	245 51	6 02	1.68	0.98249 28	65 98	2 20
1.24	0.92050 52	239 49	5 91	1.69	0.98315 26	63 78	2 12

Digitized by Google

t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2	t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2
1.70	0.98379 04	61 66	2 08	2.15	0.99763 86	10 86	47
1.71	0.98440 70	59 58	2 01	2.16	0.99774 72	10 39	43
1.72	0.98500 28	57 57	1 96	2.17	0.99785 11	9 96	44
1.73	0.98557 85	55 61	1 90	2.18	0.99795 07	9 52	39
1.74	0.98613 46	53 71	1 85	2.19	0.99804 59	9 13	41
1.75	0.98667 17	51 86	1 79	2.20	0.99813 72	8 72	36
1.76	0.98719 03	50 07	1 75	2.21	0.99822 44	8 36	38
1.77	0.98769 10	48 32	1 68	2.22	0.99830 80	7 98	34
1.78	0.98817 42	46 64	1 65	2.23	0.99838 78	7 64	33
1.79	0.98864 06	44 99	1 59	2.24	9.99846 42	7 31	33
1.80	0.98909 05	43 40	1 54	2.25	0.99853 73	6 98	30
1.81	0.98952 45	41 86	1 50	2.26	0.99860 71	6 68	30
1.82	0.98994 31	40 36	1 44	2.27	0.99867 39	6 38	29
1.83	0.99034 67	38 92	1 41	2.28	0.99873 77	6 09	27
1.84	0.99073 59	37 51	1 36	2.29	0.99879 86	5 82	26
1.85	0.99111 10	36 15	1 33	2.30	0.99885 68	5 56	25
1.86	0.99147 25	34 82	1 27	2.31	0.99891 24	5 31	24
1.87	0.99182 07	33 55	1 24	2.32	0.99896 55	5 07	23
1.88	0.99215 63	32 31	1 20	2.33	0.99901 62	4 84	23
1.89	0.99247 20	31 11	1 16	2.34	0.99906 46	4 61	20
1.90	0.99279 99	29 95	1 12	2.35	0.99911 07	4 41	21
1.91	0.99308 94	28 83	1 08	2.36	0.99915 48	4 20	19
1.92	0.99337 82	27 75	1 06	2.37	0.99919 68	4 01	19
1.93	0.99365 57	26 69	1 01	2.38	0.99923 69	3 82	18
1.94	0.99392 26	25 68	99	2.39	0.99927 51	3 64	17
1.95	0.99417 94	24 69	95	2.40	0.99931 15	3 47	16
1.96	0.99442 63	23 74	91	2.41	0.99934 62	3 31	16
1.97	0.99466 37	22 83	89	2.42	0.99937 93	3 15	15
1.98	0.99489 20	21 94	85	2.43	0.99941 08	3 00	14
1.99	0.99511 14	21 09	84	2.44	0.99944 08	2 86	14
2.00	0.99532 23	20 25	78	2.45	0.99946 94	2 72	12
2.01	0.99552 48	19 47	79	2.46	0.99949 66	2 60	14
2.02	0.99571 95	18 68	73	2.47	0.99952 26	2 46	11
2.03	0.99590 63	17 95	72	2.48	0.99954 72	2 35	11
2.04	0.99608 58	17 23	69	2.49	0.99957 07	2 24	12
2.05	0.99625 81	16 54	67	2.50	0.99959 31	2 12	10
2.06	0.99642 35	15 87	65	2.51	0.99961 43	2 02	10
2.07	0.99658 22	15 22	61	2.52	0.99963 45	1 92	9
2.08	0.99673 44	14 61	61	2.53	0.99965 37	1 83	10
2.09	0.99688 05	14 00	57	2.54	0.99967 20	1 73	8
2.10	0.99702 05	13 43	55	2.55	0.99968 93	1 65	8
2.11	0.99715 48	12 88	54	2.56	0.99970 58	1 57	7
2.12	0.99728 36	12 34	51	2.57	0.99972 15	1 50	9
2.13	0.99740 70	11 83	50	2.58	0.99973 65	1 41	7
2.14	0.99752 53	11 33	47	2.59	0.99975 06	1 34	7

Digitized by Google

t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2	t.	$\Theta(t)$	Δ_1	Δ_2
2.60	0.99976 40	1 27	6	2.80	0.99992 50	43	2
2.61	0.99977 67	1 21	6	2.81	0.99992 93	41	3
2.62	0.99978 88	1 15	6	2.82	0.99993 34	38	1
2.93	0.99980 03	1 09	6	2.83	0.99993 72	37	3
2.64	0.99981 12	1 03	5	2.84	0.99994 09	34	1
2.65	0.99982 15	98	5	2.85	0.99994 43	33	2
2.66	0.99983 13	93	5	2.86	0.99994 76	31	2
2.67	0.99984 06	88	4	2.87	0.99995 07	29	2
2.68	0.99984 94	84	5	2.88	0.99995 36	27	1
2.69	0.99985 78	79	4	2.89	0.99995 63	26	2
2.70	0.99986 57	75	4	2.90	0.99995 89	24	1
2.71	0.99987 32	71	4	2.91	0.99996 13	23	1
2.72	0.99988 03	67	4	2.92	0.99996 36	22	1
2.73	0.99988 70	63	2	2.93	0.99996 58	21	2
2.74	0.99989 33	61	4	2.94	0.99996 79	19	1
2.75	0.99989 94	57	3	2.95	0.99996 98	18	1
2.76	0.99990 51	54	3	2.96	0.99997 16	17	0
2.77	0.99991 05	51	3	2.97	0.99997 33	17	2
2.78	0.99991 56	48	2	2.98	0.99997 50	15	1
2.79	0.99992 04	46	3	2.99	6.99997 65	14	—
				3.00	0.99997 79	—	—

Digitized by Google

TABLE III.

VALEURS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$

CORRESPONDANTES AUX VALEURS DE $\frac{t}{\rho}$, EN PRENANT ρ POUR UNITÉ.

Cette Table fournit donc la probabilité que, dans une série d'observations, l'erreur commise est à l'erreur probable dans le rapport de $t : \rho$, c'est-à-dire des nombres exprimés dans les colonnes $\left(\frac{t}{\rho}\right)$.

Digitized by Google

Digitized by Google

$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ	$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ	$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ	$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ
0,00	0,00000	538	0,50	0,26407	508	1,00	0,50090	428	1,50	0,68833	322
0,01	0,00538	538	0,51	0,26915	506	1,01	0,50428	425	1,51	0,69155	319
0,02	0,01076	538	0,52	0,27421	506	1,02	0,50853	424	1,52	0,69474	317
0,03	0,01614	538	0,53	0,27927	504	1,03	0,51277	422	1,53	0,69791	315
0,04	0,02152	538	0,54	0,28431	503	1,04	0,51699	420	1,54	0,70106	313
0,05	0,02690	538	0,55	0,28934	502	1,05	0,52119	418	1,55	0,70419	310
0,06	0,03228	538	0,56	0,29436	500	1,06	0,52537	415	1,56	0,70729	309
0,07	0,03766	537	0,57	0,29936	499	1,07	0,52952	414	1,57	0,71038	306
0,08	0,04303	537	0,58	0,30435	498	1,08	0,53366	412	1,58	0,71344	304
0,09	0,04840	538	0,59	0,30933	497	1,09	0,53778	410	1,59	0,71648	301
0,10	0,05378	536	0,60	0,31430	495	1,10	0,54188	407	1,60	0,71949	300
0,11	0,05914	537	0,61	0,31925	494	1,11	0,54595	406	1,61	0,72249	297
0,12	0,06451	536	0,62	0,32419	492	1,12	0,55001	403	1,62	0,72546	295
0,13	0,06987	536	0,63	0,32911	491	1,13	0,55404	402	1,63	0,72841	293
0,14	0,07523	536	0,64	0,33402	490	1,14	0,55806	399	1,64	0,73134	291
0,15	0,08059	535	0,65	0,33892	488	1,15	0,56205	397	1,65	0,73425	289
0,16	0,08594	535	0,66	0,34380	486	1,16	0,56602	396	1,66	0,73714	286
0,17	0,09129	534	0,67	0,34866	486	1,17	0,56998	393	1,67	0,74000	285
0,18	0,09663	534	0,68	0,35352	483	1,18	0,57391	391	1,68	0,74285	282
0,19	0,10197	534	0,69	0,35835	482	1,19	0,57782	389	1,69	0,74567	280
0,20	0,10731	533	0,70	0,36317	481	1,20	0,58171	387	1,70	0,74847	277
0,21	0,11264	532	0,71	0,36798	479	1,21	0,58558	384	1,71	0,75124	276
0,22	0,11796	532	0,72	0,37277	478	1,22	0,58942	383	1,72	0,75400	274
0,23	0,12328	532	0,73	0,37755	476	1,23	0,59325	380	1,73	0,75674	271
0,24	0,12860	531	0,74	0,38231	474	1,24	0,59705	378	1,74	0,75945	269
0,25	0,13391	530	0,75	0,38705	473	1,25	0,60083	377	1,75	0,76214	267
0,26	0,13921	530	0,76	0,39178	471	1,26	0,60460	373	1,76	0,76481	265
0,27	0,14451	529	0,77	0,39649	469	1,27	0,60833	372	1,77	0,76746	263
0,28	0,14980	528	0,78	0,40118	468	1,28	0,61205	370	1,78	0,77009	261
0,29	0,15508	527	0,79	0,40586	466	1,29	0,61575	367	1,79	0,77270	258
0,30	0,16035	527	0,80	0,41052	465	1,30	0,61942	366	1,80	0,77528	257
0,31	0,16562	526	0,81	0,41517	462	1,31	0,62308	363	1,81	0,77785	254
0,32	0,17088	526	0,82	0,41979	461	1,32	0,62671	361	1,82	0,78039	252
0,33	0,17614	524	0,83	0,42440	459	1,33	0,63032	359	1,83	0,78291	251
0,34	0,18138	524	0,84	0,42899	458	1,34	0,63391	356	1,84	0,78542	248
0,35	0,18662	523	0,85	0,43357	456	1,35	0,63747	355	1,85	0,78790	246
0,36	0,19185	522	0,86	0,43813	454	1,36	0,64102	352	1,86	0,79036	244
0,37	0,19707	522	0,87	0,44267	452	1,37	0,64454	350	1,87	0,79280	242
0,38	0,20229	520	0,88	0,44719	450	1,38	0,64804	348	1,88	0,79522	239
0,39	0,20749	519	0,89	0,45169	449	1,39	0,65152	346	1,89	0,79761	238
0,40	0,21268	519	0,90	0,45618	449	1,40	0,65498	343	1,90	0,79999	236
0,41	0,21787	517	0,91	0,46064	445	1,41	0,65841	341	1,91	0,80235	234
0,42	0,22304	517	0,92	0,46509	443	1,42	0,66182	339	1,92	0,80469	231
0,43	0,22821	515	0,93	0,46952	441	1,43	0,66521	337	1,93	0,80700	230
0,44	0,23336	515	0,94	0,47393	439	1,44	0,66858	335	1,94	0,80930	228
0,45	0,23851	513	0,95	0,47822	438	1,45	0,67193	333	1,95	0,81158	225
0,46	0,24364	512	0,96	0,48270	435	1,46	0,67526	330	1,96	0,81383	224
0,47	0,24876	512	0,97	0,48705	434	1,47	0,67856	328	1,97	0,81607	221
0,48	0,25388	510	0,98	0,49139	431	1,48	0,68184	326	1,98	0,81828	220
0,49	0,25898	509	0,99	0,49570	430	1,49	0,68510	323	1,99	0,82048	218

Digitized by Google

$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ	$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ	$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ	$\frac{t}{\varrho}$	$\Theta(t)$	Δ
2,00	0,82266	215	2,40	0,89450	145	2,80	0,94105	90	3,20	0,96910	52
2,01	0,82481	214	2,41	0,89595	143	2,81	0,94195	89	3,21	0,96962	51
2,02	0,82695	212	2,42	0,89738	141	2,82	0,94284	87	3,22	0,97013	51
2,03	0,82907	210	2,43	0,89879	140	2,83	0,94371	87	3,23	0,97064	50
2,04	0,83117	207	2,44	0,90019	138	2,84	0,94458	85	3,24	0,97114	49
2,05	0,83324	206	2,45	0,90157	136	2,85	0,94543	84	3,25	0,97163	48
2,06	0,83530	204	2,46	0,90293	135	2,86	0,94627	84	3,26	0,97211	48
2,07	0,83734	202	2,47	0,90428	134	2,87	0,94711	82	3,27	0,97259	47
2,08	0,83936	201	2,48	0,90562	132	2,88	0,94793	81	3,28	0,97306	46
2,09	0,84137	198	2,49	0,90694	131	2,89	0,94874	80	3,29	0,97352	45
2,10	0,84335	196	2,50	0,90825	129	2,90	0,94954	79	3,30	0,97397	45
2,11	0,84531	195	2,51	0,90954	128	2,91	0,95033	78	3,31	0,97442	44
2,12	0,84726	193	2,52	0,91082	126	2,92	0,95111	76	3,32	0,97486	44
2,13	0,84919	190	2,53	0,91208	124	2,93	0,95187	76	3,33	0,97530	43
2,14	0,85109	189	2,54	0,91332	124	2,94	0,95263	75	3,34	0,97573	42
2,15	0,85298	188	2,55	0,91456	122	2,95	0,95338	74	3,35	0,97615	42
2,16	0,85486	185	2,56	0,91578	120	2,96	0,95412	73	3,36	0,97657	41
2,17	0,85671	183	2,57	0,91698	119	2,97	0,95485	72	3,37	0,97698	40
2,18	0,85854	182	2,58	0,91817	118	2,98	0,95557	71	3,38	0,97738	40
2,19	0,86036	180	2,59	0,91935	116	2,99	0,95628	70	3,39	0,97778	39
2,20	0,86216	178	2,60	0,92051	115	3,00	0,95698	69	3,40	0,97817	359
2,21	0,86394	176	2,61	0,92166	114	3,01	0,95767	68	3,50	0,98176	306
2,22	0,86570	173	2,62	0,92280	112	3,02	0,95835	67	3,60	0,98482	261
2,23	0,86745	172	2,63	0,92392	111	3,03	0,95902	66	3,70	0,98743	219
2,24	0,86917	171	2,64	0,92503	110	3,04	0,95968	65	3,80	0,98962	183
2,25	0,87088	170	2,65	0,92613	108	3,05	0,96033	65	3,90	0,99147	155
2,26	0,87258	167	2,66	0,92721	107	3,06	0,96098	63	4,00	0,99302	129
2,27	0,87425	166	2,67	0,92828	106	3,07	0,96161	63	4,10	0,99431	108
2,28	0,87591	164	2,68	0,92934	104	3,08	0,96224	62	4,20	0,99539	88
2,29	0,87755	163	2,69	0,93038	103	3,09	0,96286	60	4,30	0,99627	73
2,30	0,87918	160	2,70	0,93141	102	3,10	0,96346	60	4,40	0,99700	60
2,31	0,88078	159	2,71	0,93243	101	3,11	0,96406	60	4,50	0,99760	48
2,32	0,88237	158	2,72	0,93344	99	3,12	0,96466	58	4,60	0,99808	40
2,33	0,88395	155	2,73	0,93443	98	3,13	0,96524	58	4,70	0,99848	31
2,34	0,88550	155	2,74	0,93541	97	3,14	0,96582	56	4,80	0,99879	26
2,35	0,88705	152	2,75	0,93638	96	3,15	0,96638	56	4,90	0,99905	21
2,36	0,88857	151	2,76	0,93734	94	3,19	0,96694	55	5,00	0,99926	
2,37	0,89008	149	2,77	0,93828	94	3,17	0,96749	55			
2,38	0,89157	147	2,78	0,93922	92	3,18	0,96804	53			
2,39	0,89304	146	2,79	0,94014	91	3,19	0,96857	53			

Digitized by Google

TABLE IV.

VALEURS DES SINUS ET COSINUS ET DE LEURS CARRÉS CORRESPONDANTES DE DEGRÉ EN DEGRÉ AUX ARCS COMPRIS ENTRE 0 ET 90 DEGRÉS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Grad.	Sin.	Cos.	Sin^2.	Cos^2.	Grad.
1	0,0174524	0,9998477	0,0003045	0,9996955	89
2	0,0348995	0,9993908	0,0011756	0,9988244	88
3	0,0523360	0,9986295	0,0027390	0,9972610	87
4	0,0697565	0,9975641	0,0048659	0,9951341	86
5	0,0871557	0,9961947	0,0075959	0,9924041	85
6	0,1045285	0,9945219	0,0109244	0,9890756	84
7	0,1218693	0,9925462	0,0148498	0,9851512	83
8	0,1391731	0,9902681	0,0193441	0,9806559	82
9	0,1564345	0,9876883	0,0244703	0,9755297	81
10	0,1736482	0,9848078	0,0301508	0,9698492	80
11	0,1908090	0,9816272	0,0364046	0,9635954	79
12	0,2079117	0,9781476	0,0432269	0,9567731	78
13	0,2249511	0,9743701	0,0506029	0,9493971	77
14	0,2419219	0,9702957	0,0585261	0,9414739	76
15	0,2588190	0,9659258	0,0669872	0,9330128	75
16	0,2756374	0,9612617	0,0759575	0,9240425	74
17	0,2923717	0,9563048	0,0854808	0,9145192	73
18	0,3090170	0,9510565	0,0954915	0,9045085	72
19	0,3255682	0,9455185	0,1060945	0,8930055	71
20	0,3420201	0,9396926	0,1169776	0,8830224	70
21	0,3583679	0,9335804	0,1284369	0,8715631	69
22	0,3746066	0,9271839	0,1402295	0,8597705	68
23	0,3907311	0,9205049	0,1526707	0,8473293	67
24	0,4067366	0,9135454	0,1654339	0,8345661	66
25	0,4226183	0,9063078	0,1786059	0,8213941	65
26	0,4383711	0,8987940	0,1921691	0,8078309	64
27	0,4539905	0,8910065	0,2061069	0,7938931	63
28	0,4694716	0,8829476	0,2204030	0,7795970	62
29	0,4848096	0,8746197	0,2350397	0,7649603	61
30	0,5000000	0,8660254	0,2500000	0,7500000	60
31	0,5150381	0,8571673	0,2652641	0,7347359	59
32	0,5299193	0,8480481	0,2807951	0,7191049	58
33	0,5446390	0,8386706	0,2966326	0,7033674	57
34	0,5591929	0,8290376	0,3126956	0,6873044	56
35	0,5735764	0,8191521	0,3289894	0,6700106	55
36	0,5877853	0,8090170	0,3454912	0,6545088	54
37	0,6018150	0,7986355	0,3622181	0,6377819	53
38	0,6156615	0,7880107	0,3780384	0,6219616	52
39	0,6293204	0,7771460	0,3961426	0,6038574	51
40	0,6427876	0,7660444	0,4131751	0,5868248	50
41	0,6560590	0,7547096	0,4304134	0,5695866	49
42	0,6691306	0,7431448	0,4477349	0,5522651	48
43	0,6819984	0,7313537	0,4651192	0,5348808	47
44	0,6946584	0,7193398	0,4825497	0,5174503	46
45	0,7071068	0,7071068	0,5000000	0,5000000	45

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTE DES OUVRAGES PUBLIÉS

SUR LES

THÉORIES DES PROBABILITÉS, DES MOINDRES CARRÉS, DES ERREURS, ETC.

Airy. — On the algebrical and numerical theory of errors of observations. — Cambridge, 1861.

Bernoulli. — Ars conjectandi. — Basileæ, 1713.

Bordoni (A.). — Sugli esami, ossia sul merito di un esaminato. — Pavia.

Bravais (A.). — Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point.

Benard. — Note sur une question de probabilité. — Paris, 1835.

Bienaymé. — Sur la probabilité des erreurs (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XVII).

Biver. — Théorie analytique des moindres carrés (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XVIII).

Bravi (Giuseppe). — Teorica e pratica del probabile. — Bergamo, 1840.

Condorcet. — Application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. — Paris, 1785.

Cournot. — Théorie des chances et des probabilités. — Paris, 1843.

Catalan. — Deux problèmes de probabilités (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. VI).

Catalan. — Solution d'un problème de probabilité relatif au jeu de rencontre (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. II).

Coste. — Question de probabilité applicable aux décisions rendues par les jurés (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. VII).

Cotes. — Harmonica mensurarum. — Cambridge, 1722.

Degen. — C. F. Tabularum ad faciliorum probabilitatis computationem utilium Enneas. — Kiobenhawn, 1824.

Dedeckind. — Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Journal de Crelle*, t. L).

Dedeckind. — Begründung der Methode der kleinsten Quadrate (*Ac. Berol.* 1831).

Galloway. — Probabilities. — Edinburg, 1838.

Digitized by Google

Gauss. — Theoria combinationis observationum errorum minimis obnoxiæ. — Gottingue, 1821.

Gauss — Supplementum Theoriæ. — Gottingue.

Guibert. — Solution d'une question relative à la probabilité des jugements rendus à une majorité quelconque (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. III).

Gerling. — Die Angleichungsrechnungen der praktischen geometrie oder der Methode der kleinsten Quadrate. — Hambourg, 1843.

Hagen. — Gründzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Berlin, 1837.

Hansen. — Commentatio de gradus præcisionis computatione, 1830.

Hauteserve (Gauthier d'). — Traité élémentaire sur les probabilités. — Paris, 1834.

Hauteserve (Gauthier d'). — Application de l'Algèbre élémentaire au calcul des probabilités, suivi d'une Application de ce calcul aux jeux de whist et de piquet. — Paris, 1840.

Huberdt. — Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Berlin, 1845.

Iahn. — Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben. — Leipsig, 1839.

Lacroix. — Traité élémentaire du Calcul des probabilités.

Laplace. — Théorie analytique des probabilités. — Paris, 1812.

Laplace. — Essai philosophique sur les probabilités. — Paris, 1814.

Liagre. — Calcul des probabilités et théorie des erreurs. — Bruxelles.

Littrow. — Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihren Anwendung Leben auf das wissenschaftliche und practische. — Wien, 1832.

Macleroth. — Mémoire à consulter sur la marche et la succession des événements aléatoires. — Paris, 1840.

Mertz. — Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf Glückspiele, Lotterien, Lebensversicherungsrenten, Wahlen, Zeugenaussagen, Urtheilssprüche, etc. — Francfort, 1854.

Meyer. — Mémoire sur l'application du Calcul des probabilités aux opérations du nivellement topographique. — Bruxelles, 1848.

Meyer. — Essai sur une exposition nouvelle de la théorie analytique des probabilités *à posteriori*. — Liége, 1857.

Mondesir. — Solution d'une question qui se présente dans le Calcul des Probabilités (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. II).

Morgan. — The principles and doctrine of assurancus, annuities, on lives, etc. — London, 1821.

Ottinger. — Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Berlin, 1852.

Patavio. — Probabilismus methodo mathematica demonstratus. — Iriæ, 1840.

Poisson. — Recherches sur la probabilité des jugements, précédées des Règles générales du Calcul des probabilités. — Paris, 1837.

Digitized by Google

Puissant. — Mémoires sur l'application du Calcul des probabilités aux mesures géodésiques. — Paris, 1832.

Quetelet. — Théorie des probabilités. — Bruxelles, 1853.

Ramus. — Sur une question de probabilité relative aux corrections des hauteurs barométriques (*Journal de Crelle*, t. XXIV).

Reuschle. — Ueber die Deduction der Methode der kleinsten Quadraten aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Journal de Crelle*, t. XXVI-XXVII).

Roger. — Solution d'un problème de probabilités (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XVII).

Ruffini. — Riflessione critica sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del Sig. Laplace. — Modène, 1821.

Sawitsch. Anvendung der Wahrscheinlichkeitstheorie. — Leipsig, 1863.

Tafeln. — Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von Beobachtungsfehtern. — Berlin, 1853.

Tchebycheff. — Démonstration éléméntaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités (*Journal de Crelle*, t. XXXIII).

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA.

Page.	*Ligne.*	*Au lieu de :*	*Lisez :*
36,	19,	$+0,25$,	$+3,25$.
»	22, 23, 24, 25, 26, 28, 29,	209, 659, 259, 259, 009, 859, 48759,	$20y$, $65y$, $25y$, $25y$, $00y$, $85y$, $4875y$.
»	25, 26,	$-3,289$, $-8,009$,	$+3,25y$; $+8,00y$.
43,	32 et suivantes.	$a \pm bm$,	$ae \pm bm$,
44,	5,	$a-bn^2$,	$ae-bx^2$.
46,	17,	septième,	système.
48,	14,	$e-h^2dx$,	$e-h^2x^2\,dx$.
»	15,	$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$,	$\frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1$.
49,	5,	+ la possibilité,	+ la probabilité.
»	17,	$e-h_2x\,dx^2$,	$e-h^2x^2\,dx$.
50,	16,	$lx = t$,	$hx = t$.
51,	14,	$\frac{-e-t^2}{t}$,	$\frac{-e-t^2}{2t}$.
»	15,	$(2t^2)^2$,	$(2t^2)^n$.
52,	17,	$\varphi(x)$,	$\varphi(x)\,dx$.
56,	1, 3,	$\frac{h}{3}, \frac{3}{h}, \frac{3}{h^2}$,	$\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4a}$.
59,	2, 6, 14, 15,	$\frac{h}{\sqrt{\pi}}$,	$\left(\frac{h}{\pi}\right)^n$.
»	4,	$\frac{+(\Sigma o)^2}{n}$,	$\frac{-(\Sigma o)^2}{n} + \Sigma o^2$.
»	15,	$-2h^2z\Sigma(\mu-o)h^2(\mu-o)^2$,	$-2h^2z\Sigma(\mu-o)-h^2\Sigma(\mu-o)^2$.
61,	17,	$\frac{1}{2}a$,	$\frac{1}{2a}$.
62,	8,	$\frac{4}{\sqrt{\pi}}$,	$\frac{h}{\sqrt{\pi}}$.
63,	18,	0,19,	0,99
»	19,	2,317,	2,327.
70,	23,	$= O = V + l$,	$= O - V + l$.
49,	9,	$\varphi(x)\,dx$,	$\varphi'(x)\,dx$.
57,	18,	$\int_{-x}^{+x}$	$\int_{-x'}^{+x'}$
69,	10, 22e observ.	$-3,8$	$-2,8$
71,	25, 26, 27,	0,034; 0,034; 12,3o8,	0,0036; 0,036; 12,5o8.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

89098828577

B89098828577A

k may be kept

FOURTEEN DAYS

A fine of TWO CENTS will be charged for each day the book is kept overtime.

3 Ja'56			

Demco 291-B5

Digitized by Google

LGD
Faa de Bruno . F112 2
Traité élémentaire
du calcul des erreurs DEMCO-207
DATE | ISSUED TO

PHYSICS AND MATH.

G.E.STECHERT & Co. NEW YORK

Digitized by Google

89098828577

b89098828577a